Cours 10

Théorème de Péano, solutions maximales

Plan :

1. Théorème de Cauchy-Péano
2. Solutions maximales
3. Durée de vie
4. Solutions globales

1) Théorème de Cauchy-Péano

Théorème (Cauchy-Péano)
Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue. Soit $(t_0, x_0) \in U$, $\eta, \rho, M > 0$ tels que $K = [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B}(x_0, \rho) \subset U$ et :

$$\|f(t,x)\| \leq M, \quad \forall (t,x) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B}(x_0, \rho)$$

Alors $\forall \varepsilon < \min(\eta, \frac{\rho}{M})$, sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution .

> ⚠️ Il n'y a pas forcément unicité (cf. exemple cours précédent) :
>
> $$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{\max(x(t), 0)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

On utilisera le théorème d'Arzelà-Ascoli :
Théorème (Arzelà-Ascoli)
Soient $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et notons $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n) = \{g : [a,b] \to \mathbb{R}^n \text{ continue}\}$ muni de $\| \cdot \|_\infty$.
Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$ telle que :

1. $\forall x \in [a,b]$, la suite $(g_n(x))_{n \geq 1}$ est bornée.
2. En notant $\omega_g(\delta) = \sup\{\|g(x) - g(y)\| : |x - y| \leq \delta, x, y \in [a,b]\}$, on a :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad \sup_{n \geq 1} \omega_{g_n}(\delta) \leq \epsilon$$

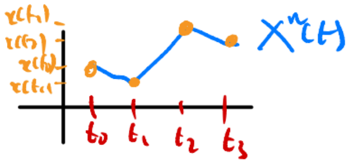
Alors il existe une sous-suite de (g_n) qui converge uniformément.

Remarque Pour une fonction g, on a g continue $\iff \omega_f(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$.

Preuve du théorème de Cauchy-Péano :
Posons $K = [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B}(x_0, \rho)$. Soit $\varepsilon < \min(\eta, \frac{\rho}{M})$. On note $t_i = t_0 + i\frac{\varepsilon}{n+1}$ pour $0 \leq i \leq n+1$, subdivision de $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ de pas $\frac{\varepsilon}{n+1}$.
On construit des points de $\mathbb{R}^n$ $(x_i)_{0 < i \leq n+1}$ par récurrence :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\varepsilon}{n+1} f(t_i, x_i) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n$$

On définit alors $X_n(t)$ pour $t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$ par interpolation linéaire.



1. On vérifie que $\forall 0 \leq i \leq n+1$, $(t_i, x_i) \in K$.
   Pour cela, on montre par récurrence que $\|x_i - x_0\| \leq \dfrac{i\varepsilon M}{n+1}$.
   - Pour $i = 0$: OK.
   - Hérédité : Si $\|x_i - x_0\| \leq \dfrac{i\varepsilon M}{n+1}$ pour $i \leq n$, on a :

   $$\|x_{i+1} - x_0\| \leq \|x_{i+1} - x_i\| + \|x_i - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}\|f(t_i, x_i)\| + \frac{i\varepsilon M}{n+1} \leq \frac{(i+1)\varepsilon M}{n+1}$$

   Ainsi, $\forall 0 \leq i \leq n+1$, $(t_i, x_i) \in K$.
2. Pour $0 \leq i \leq n$ et $t_i < t < t_{i+1}$, on a $X_n'(t) = f(t_i, x_i)$ donc $\|X_n'(t)\| \leq M$.
   On en déduit que X_n est $M-$lipschitzienne sur $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. De plus, $X_n(t_0) = x_0$ donc $(X_n(t_0))_{n\geq 1}$ est bornée. Par Arzelà-Ascoli, quitte à extraire, on peut supposer que $X_n \to X$ uniformément sur $[t_0, t_0 + \varepsilon]$.
3. Pour $0 \leq i \leq n$ et $t \in [t_i, t_{i+1}]$, on a :

   $$\|X_n'(t) - f(t, X_n(t))\| = \|f(t_i, x_i) - f(t, X_n(t))\| \leq \omega_f\left(\frac{\varepsilon}{n+1} + M\frac{\varepsilon}{n+1}\right)$$

   (car $\|X_n(t) - x_i\| = \|X_n(t) - X_n(t_{i+1})\| \leq \|f(t_i)\| \cdot |t_{i+1} - t| \leq M\dfrac{\varepsilon}{n+1}$), où
   $\omega_f(\delta) = \sup\{\|f(t,x) - f(u,y)\| : |t-u| + \|x-y\| \leq \delta, (t,x) \in K, (u,y) \in K\} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$ par uniforme continuité de f sur K.

Par l'inégalité des accroissements finis, on obtient $\forall t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$:

$$\left\|X_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(u, X_n(u))\, du\right\| \leq \omega_f\left((1+M)\frac{\varepsilon}{n+1}\right)|t - t_0|$$

En passant à la limite lorsque $n \to \infty$, par convergence uniforme, on en déduit que $\forall t_0 < t < t_0 + \varepsilon$,

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, X(u))\, du$$

En dérivant, on obtient une solution sur $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. On construit de même une solution sur $[t_0 - \varepsilon, t_0]$ et elles se recollent en une solution sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ car les dérivées à droite et à gauche en t_0 sont $f(t_0, x_0)$.

Nous allons maintenant passer à l'étude de l'intervalle de définition des solutions du problème de Cauchy.

2) Solutions maximales

Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, semi-lipschitzienne.

Définition On dit qu'une solution $u : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$ est une **solution maximale** (ou non prolongeable) si elle n'a pas de prolongement à un intervalle strictement plus grand, c'est-à-dire si elle n'est pas la restriction à I d'une solution définie sur un intervalle $I' \supsetneq I$.

> **Rappel :** Une solution du problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$ est une fonction dérivable $u : I \to \mathbb{R}^n$ telle que :
>
> 1. I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $u(t_0) = x_0$
> 2. $\forall t \in I, (t, u(t)) \in U$
> 3. $\forall t \in I, u'(t) = f(t, u(t))$

On va démontrer le résultat suivant :
Théorème Pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in U$, il existe une unique solution maximale $u :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle ouvert avec $u(t_0) = x_0$ telle que toute autre solution vérifiant cette condition initiale est la restriction de u à un sous-intervalle de $]t_-, t_+[$.
Cette solution est maximale.

Remarque L'intervalle de définition d'une solution maximale est toujours ouvert.

Pour $u : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $v : I_2 \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions telles que $u = v$ dans $I_1 \cap I_2$, leur **recollement** est la fonction $u * v : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$(u * v)(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in I_1 \\ v(t) & \text{si } t \in I_2 \end{cases}$$

La preuve du théorème repose sur le résultat suivant :
Proposition Soient $u : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $v : I_2 \to \mathbb{R}^n$ deux solutions du problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$ définies sur des intervalles ouverts et telles que $u(t_0) = v(t_0)$ pour un certain $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Alors :

- $u = v$ sur $I_1 \cap I_2$.
- Le recollement de u et v est une solution définie sur $I_1 \cup I_2$.

Avant les preuves, donnons un exemple.
Exemple
Soit $x'(t) = x(t)^2$, avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto x^2$ continue, $\mathcal{C}^1$, donc semi-lipschitz.
La solution valant x_0 en t_0 est $x(t) = \dfrac{x_0}{(t_0 - t)x_0 + 1}$. L'intervalle maximal de définition de cette solution est :

$$\begin{cases}]-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[& \text{si } x_0 > 0 \\ ]t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty[& \text{si } x_0 < 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } x_0 = 0 \end{cases}$$

Vérifions par exemple que si $x_0 > 0$, $u(t) = \dfrac{x_0}{(t_0 - t)x_0 + 1}$ sur $]-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[$ est maximale.
Par l'absurde, si u est solution sur $]a, +\infty[$ avec $a < t_0 + \frac{1}{x_0}$, alors $u = x$ sur $]t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty[$ d'après la proposition, et par continuité de u en $t_0 + \frac{1}{x_0}$ on obtient $u\left(t_0 + \frac{1}{x_0}\right) = \lim\limits_{t \searrow t_0 + \frac{1}{x_0}} x(t) = \infty$, absurde.

Preuve de la proposition :
On montre que l'ensemble $A := \{t \in I_1 \cap I_2 : u(t) = v(t)\} \subset I_1 \cap I_2$ est non vide, ouvert et fermé dans $I_1 \cap I_2$, ce qui implique $A = I_1 \cap I_2$ par connexité.

- $A \neq \emptyset$ car $t_0 \in I_1 \cap I_2$.
- A est fermé dans $I_1 \cap I_2$ car $A = (u - v)^{-1}(\{0\})$ avec $(u - v)$ continue.
- Montrons que A est ouvert dans $I_1 \cap I_2$. Soit $t_1 \in A$. Alors $t_1 \in I_1 \cap I_2$ et $u(t_1) = v(t_1) = x_1 \in \mathbb{R}^n$, $(t_1, x_1) \in U$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$ admet d'après Cauchy-Lipschitz une unique solution locale définie sur un intervalle $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ avec $\delta > 0$. Donc par unicité $u(t) = w(t) = v(t)$ $\forall t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ et $[t_1 - \delta, t_1 + \delta] \subset A$. Donc A est ouvert dans $I_1 \cap I_2$.

> Le fait que le recollement de u et v est une solution est laissé en exercice.

<u>Preuve du théorème :</u>
Soit $I_{\max}$ l'union de tous les intervalles contenant t_0 sur lesquels le problème de Cauchy
$(*)$ $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une solution.
D'après Cauchy-Lipschitz, c'est un intervalle ouvert de la forme $I_{\max} =]t_-, t_+[$.

Pour tout $t \in]t_+, t_-[$, soit $u(t)$ comme la valeur en t de n'importe quelle solution de $(*)$ définie sur un intervalle contenant t. La proposition précédente montre que c'est bien défini. C'est bien une solution :

- On a bien $u(t_0) = x_0$.
- Soit $t \in]t_-, t_+[$. Vérifions que $u'(t) = f(t, u(t))$.
  Par définition de $]t_-, t_+[$, il existe une solution v définie sur un intervalle I contenant t, et donc $u'(t) = f(t, u(t))$.
- Par définition de $]t_-, t_+[$, il n'existe pas de solution définie sur un intervalle plus grand.

> ⚠️ Si f est seulement continue (pas localement lipschitzienne), on n'a plus l'unicité de la solution maximale.

3) Durée de vie

Pour simplifier, on suppose ici $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie sur $J \times \Omega$ où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.

On s'intéresse à l'intervalle de définition d'une solution maximale. Cet intervalle peut être différent de J (cf. exemple $x'(t) = x(t)^2$ où $J = \mathbb{R}$ avec des solutions maximales non définies sur $\mathbb{R}$).

L'idée générale est que si une solution ne peut être prolongée sur tout J, c'est qu'elle s'approche en temps fini du bord de U. Formalisons cela pour t_+ (pour t_- les résultats sont similaires) :

<u>Proposition (Sortie définitive de tout compact)</u>
Soit $u :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ avec $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue, semi-lipschitzienne.
Si $t_+ < \sup J$, alors pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists T \in]t_-, t_+[$ tel que $\forall t \in [T, t_+[$, $u(t) \notin K$.

On rencontrera essentiellement les deux situations suivantes lorsque $t \to t_+$:

- $\|u(t)\| \to +\infty$: explosion en temps fini.
- $u(t)$ converge vers un point du bord de Ω quand $t \to t_+$.

<u>Preuve :</u> Soit $u :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale (elle n'est pas définie en t_+).
Par l'absurde, soit $t_n \to t_+$ et $K \subset \Omega$ compact avec $u(t_n) \in K$, $\forall n \geq 1$.
Par compacité, quitte à extraire, on peut supposer que $u(t_n) \to x_+ \in K$.
En particulier, $(t_n, u(t_n)) \to (t_+, x_+) \in J \times \Omega$.

Par Cauchy-Lipschitz, le problème $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_+) = x_+ \end{cases}$ admet une solution sur $]t_+ - \delta, t_+ + \delta[$, avec $\delta > 0$ pouvant être choisi de sorte que pour un voisinage V de $(t_+, x_+) \in J \times \Omega$, tout solution de $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(T) = x_T \end{cases}$ avec $(T, x_T) \in V$ est définie sur $]T - \delta, T + \delta[$.

On choisit alors n tel que $(t_n, u(t_n)) \in V$ et tel que $t_n + \delta > t_+$.
Soit alors $v :]t_n - \delta, t_n + \delta[$ la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_n) = u(t_n) \end{cases}$.
Le recollement de u et v définit une solution sur $]t_-, t_n + \delta[$ qui contient strictement $]t_-, t_+[$, ce qui est absurde.

4) Solutions globales

Définition Soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, semi-lipschitzienne. On dit qu'une solution maximale $u : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy est **globale** si $I = J$.

Théorème (Critère de sous-linéarité)
Soit $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue, semi-lipschitzienne. On suppose que pour tout compact $K \subset J$, $\exists C_1, C_2 \geq 0$ tels que

$$\forall t \in K, \, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(t, x)\| \leq C_1 + C_2 \|x\|$$

Alors toute solution maximale est globale.

> Les hypothèses sont satisfaites si f est bornée

On fait appel au lemme de Grönwall (qui sera utile de nombreuses fois) :
Lemme de Grönwall Soit $y : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ continue et $c_0 \geq 0$.

1. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ continue. On suppose que

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c_0 + \int_a^t f(s) y(s) \, ds$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c_0 \exp\left(\int_a^t f(s) \, ds \right)$$

2. On suppose de plus

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c_0 + c \int_a^t y(s) \, ds \quad \text{avec } c > 0$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \, y(t) \leq c_0 \exp(c(t - a))$$

Preuve du lemme :
Le point 2. est une conséquence du 1) avec $f \equiv c$.
Pour 1. , posons $h(t) = c_0 + \int_a^t f(s) y(s) \, ds$, de sorte que $h'(t) = f(t) y(t)$ pour $t \in [a, b]$.
Comme $y(t) \leq h(t)$, on obtient $h'(t) \leq f(t) h(t)$.
Soit alors $H(t) = h(t) \exp\left(-\int_a^t f(s) \, ds\right)$.
Alors $H'(t) = \exp\left(-\int_a^t f(s) \, ds\right)(h'(t) - f(t)h(t)) \leq 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

Ainsi H est décroissante. Or $H(a) = h(a) = c_0$. Donc $h(t) \leq c_0 \exp\left(\int_a^t f(s)\,ds\right)$.
Comme $y(t) \leq h(t)$, on en déduit le résultat.

> On applique typiquement ce lemme avec la norme d'une solution (ou la différence de deux solutions).

<u>Preuve du théorème :</u>
Soit $u :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale du problème de Cauchy. On suppose $t_+ < \sup J$. Alors par le théorème de sortie des compacts, on a :

$$\|u(t)\| \xrightarrow[t \to t_+]{} +\infty$$

Mais $[t_0, t_+] \subset J$ est compact, donc par hypothèse $\exists C_1, C_2 \geq 0$ tels que

$$\|f(t,x)\| \leq C_1 + C_2\|x\|, \quad \forall t \in [t_0, t_+],\ \forall x \in \mathbb{R}$$

On obtient pour tout $t \in [t_0, t_+[$:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\|\,ds \\
&\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t (C_1 + C_2\|u(s)\|)\,ds \\
&\leq \underbrace{\|u(t_0)\| + C_1(t_+ - t_0)}_{c_0} + C_2 \int_{t_0}^t \|u(s)\|\,ds
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Grönwall, on conclut que :

$$\|u(t)\| \leq c_0 \exp(C_2(t_+ - t_0)), \quad \forall t \in [t_0, t_+[$$

Ce qui contredit $\|u(t)\| \xrightarrow[t \to t_+]{} +\infty$.