Cours 11

Influence des conditions initiales, équations différentielles linéaires

Plan :

1. Continuité par rapport aux données initiales
2. Équations différentielles linéaires : existence et unicité globales
3. La résolvante

1) Continuité par rapport aux données initiales

Soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et semi-lipschitzienne. Soit $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale de :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

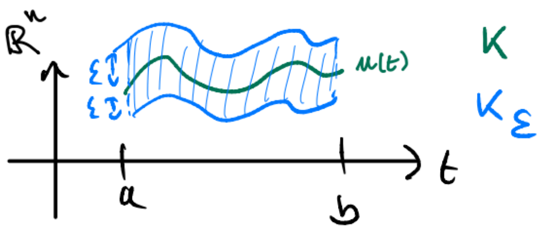
On veut savoir comment cette solution maximale, et son domaine de définition, dépendent de la condition initiale.

Définition Soit $u : [a, b] \to \Omega$ la restriction d'une solution de $(*)$ à un sous-intervalle **compact** de son intervalle de définition. Le **graphe** de u est :

$$K(u) = \{(t, u(t)) : t \in [a, b]\} \subset J \times \Omega$$

Pour $\varepsilon > 0$, le ε**-tube autour de** $K(u)$ est défini par :

$$K_\varepsilon(u) = \{(t, y) \ \ t \in [a, b], \|y - u(t)\| \leq \varepsilon\} \subset J \times \mathbb{R}^n$$

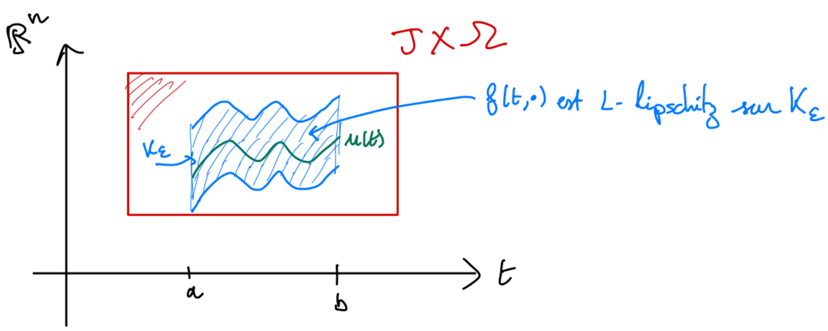


Lemme $\exists \varepsilon > 0$ tel que :

1. $K_\varepsilon(u)$ est un compact inclus dans $J \times \Omega$.
2. $\exists L \geq 0$ tel que si $(t, x) \in K_\varepsilon(u)$ et $(t, y) \in K_\varepsilon(u)$, alors

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

illustration :



Preuve :
Pour simplifier les notations, on pose $K = K(u)$ et $K_\varepsilon = K_\varepsilon(u)$.

1. On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de la distance $d((t,x),(s,y)) = |t-s| + \|x-y\|$.
   K est compact comme image d'un compact $[a,b]$ par l'application continue $t \mapsto (t, u(t))$. K_ε étant fermé borné, il est compact. Comme $K \subset J \times \Omega$, on a $d(K, (J\times\Omega)^c) > 0$. Par compacité, on peut trouver $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $d(K_\varepsilon, (J\times\Omega)^c) > 0$, donc $K_\varepsilon \subset J \times \Omega$.
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a immédiatement

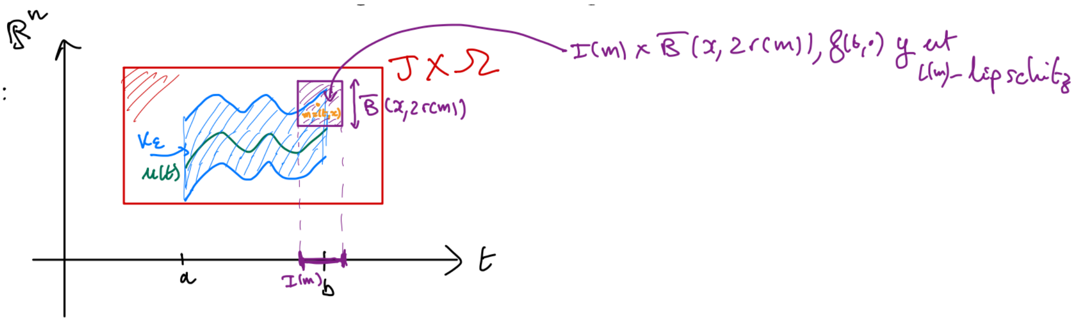
$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \sup_{K_\varepsilon} \|_x f\| \cdot \|x-y\|$$

Dans le cas général, il faut être plus fin. Par hypothèse semi-lipschitzienne, pour tout $= (t,x) \in K_\varepsilon$, on peut trouver :

- un intervalle ouvert $I()$ contenant t (pas forcément inclus dans $[a,b]$),
- une boule fermée $\overline{B}(x, 2r())$ incluse dans Ω,
- $L() > 0$ telle que

$$\forall (t,x),(t,y) \in I() \times \overline{B}(x,2r()), \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L()\|x-y\|$$

illustration :



On a un recouvrement ouvert de K_ε :

$$K_\varepsilon \subset \ _{\in K_\varepsilon} I() \times B(x, r())$$

Par compacité de K_ε, on peut en extraire un sous-recouvrement fini :

$$K_\varepsilon \subset \ _{i=1} I(_i) \times B(x_i, r(_i)) \quad \text{avec } _i = (t_i, x_i) \in K_\varepsilon$$

Posons $= \max_{1\leq i \leq} L(_i)$, $r = \min_{1\leq i\leq} r(_i)$ et $M = \sup_{K_\varepsilon} \|f\|$.
Soient (t,x) et $(t,y) \in K_\varepsilon$.

- **Cas 1 :** $\|x-y\| < r$.
  Alors il existe $i \leq$ tel que $(t,x) \in I(_i) \times B(x_i, r(_i))$. On montre alors que $(t,y) \in I(_i) \times \overline{B}(x_i, 2r(_i))$. Donc :

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(_i)\|x-y\| \leq \|x-y\|$$

- **Cas 2 :** $\|x-y\| \geq r$.
  Alors :

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq 2M \leq \frac{2M}{r}\|x-y\|$$

Ainsi, $L = \max\left(, \frac{2M}{r}\right)$ convient.

> On rappelle :
> Lemme (Gronwall)

> Soit $g : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et $t_0 \in I$. On suppose qu'il existe $C_0, c \geq 0$ t.q.
>
> $$g(t) \leq C_0 + c \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds, \quad \forall t \in I, t \geq t_0$$
>
> Alors
>
> $$g(t) \leq {C_0}^{c(t-t_0)}, \quad \forall t \in I, t \geq t_0$$

<u>Théorème (Dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales)</u>
Soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue semi-lipschitzienne. Soit $u : [a, b] \to \Omega$ la restriction d'une solution de $x'(t) = f(t, x(t))$ (condition initiale quelconque dans $J \times \Omega$) à un sous-intervalle compact $[a, b]$ de son domaine de définition.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon(u) \subset J \times \Omega$.
Il existe $\eta \in]0, \varepsilon[$ tel que si y est une solution maximale de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{avec } (t_0, y_0) \in K_\eta(u)$$

alors :

1. y est définie sur un intervalle contenant $[a, b]$.
2. $\forall t \in [a, b]$, $(t, y(t)) \in K_\varepsilon(u)$, c'est-à-dire

$$\sup_{t \in [a,b]} \|u(t) - y(t)\| \leq \varepsilon$$

3. $\exists M, L > 0$ tels que si y_0 et y_1 sont les solutions sur $[a, b]$ de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

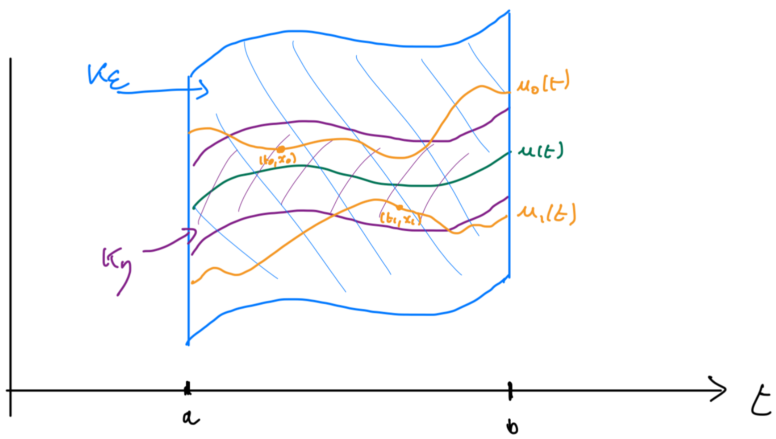
   avec $(t_0, x_0) \in K_\eta(u)$ et $(t_1, x_1) \in K_\eta(u)$, alors

$$\forall t \in [a, b], \quad \|y_1(t) - y_0(t)\| \leq (\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|)^{L|t-t_0|}$$

   En particulier, si $t_1 = t_0$, on a :

$$\forall t \in I, \quad \|y_1(t) - y_0(t)\| \leq \|x_1 - x_0\|^{L|t-t_0|}$$

<u>illustration</u> :



<u>Preuve :</u>
Pour simplifier, on pose $K = K(u)$ et $K_\varepsilon = K_\varepsilon(u)$.
Soit $L > 0$ tel que si $(t, x) \in K_\varepsilon$ et $(t, y) \in K_\varepsilon$, $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$ (lemme précédent) On montre le résultat avec $\eta < \varepsilon^{-L(b-a)}$.

Preuve de 1. et 2.

Soit $y : I \to \Omega$ une solution maximale de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{avec } (t_0, x_0) \in K_\eta$$

On travaille dans le futur de t_0 (même raisonnement dans le passé)

Étape 1 On montre que $t \in [t_0, b] \cap I \quad \|u(t) - y(t)\| < \varepsilon$.
Si ce n'est pas le cas, soit $t_1 = \inf\{t \in [t_0, b] \cap I : \|u(t) - y(t)\| \geq \varepsilon\}$.
Ainsi $\|u(t_1) - y(t_1)\| = \varepsilon$ et $\|u(t) - y(t)\| \leq \varepsilon$ pour $t_0 \leq t < t_1$, de sorte que $(t, y(t)) \in K_\varepsilon$, et clairement $(t, u(t)) \in K_\varepsilon$. Ainsi, pour $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$\|u(t) - y(t)\| \leq \|u(t_0) - y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, y(s))\| \, ds \leq \eta + L \int_{t_0}^{t} \|u(s) - y(s)\| \, ds$$

Donc par Gronwall, $\|u(t_1) - y(t_1)\| \leq \eta^{L(t_1 - t_0)} \leq \eta^{L(b-a)} < \varepsilon$, ce qui est absurde.
Étape 2 Par l'absurde, supposons que $\sup I \leq b$.
D'après ce qui précède, $\forall t \in [t_0, \sup I[$, $y(t) \in (K_\varepsilon)$ où : $(t, x) \mapsto x$. $(K_\varepsilon) \subset \Omega$ est compact comme image de K_ε par continue. Cela contredit le lemme de sortie définitive de tout compact.

Preuve de 3.

Par définition, $\forall t \in [a, b]$, $y_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s)) \, ds$ et $y_1(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, y_1(s)) \, ds$.
Donc

$$\begin{aligned} \|y_1(t) - y_0(t)\| &\leq \|x_1 - x_0\| + \left\| \int_{t_1}^{t} f(s, y_1(s)) \, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \|x_1 - x_0\| + \left\| \int_{t_1}^{t_0} f(s, y_1(s)) \, ds \right\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))\| \, ds \end{aligned}$$

En notant $M = \sup\limits_{K_\varepsilon} \|f\|$, on a donc

$$\|y_1(t) - y_0(t)\| \leq \|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0| + L \int_{t_0}^{t} \|y_1(s) - y_0(s)\| \, ds$$

On conduit avec le lemme de Gronwall.

Corollaire Soit $(t_n, x_n) \in J \times \Omega$ avec $(t_n, x_n) \to (t_0, x_0)$.
Notons u_0, u_n les solutions des problème $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_n) = x_n \end{cases}$ définies sur un même intervalle borné. Alors $\lim\limits_{n \to \infty} \|u_n - u\|_\infty = 0$.

Proposition (Variations de la fonction)

Soient $f, g : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ t.q. $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Soit $I \subset J$ tel que les solutions u, v de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sont définies sur I.
Alors $\forall t \in I, \quad \|u(t) - v(t)\| \leq \varepsilon |t - t_0|^{L|t - t_0|}$.

En utilisant les mêmes idées, on démontre le résultat :
Continuité par rapport à des paramètres (Admis)
Soit $\subset \mathbb{R}^k$ un ouvert (espaces des paramètres).
Soit $f : J \times \Omega \times \ \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne par rapport aux 2^{e} et $^{\text{e}}$ variables.

Alors $\forall(t_0, x_0, \varepsilon_0) \in J \times \Omega \times$, $\exists W$ voisinage de ε_0 tel que $\forall \varepsilon \in W$ les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \varepsilon_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admettent deux solutions u_ε et u_{ε_0} définies sur un même intervalle borné, et de plus $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}\| \underset{\varepsilon \to \varepsilon_0}{\longrightarrow} 0$.

2) Équations différentielles linéaires : existence et unicité globales

Dans ce cadre, on s'intéresse au problème de Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où :

- $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert
- $A : J \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$)
- $b : J \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$
- $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

> Ici $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec $f(t, x) = A(t)x + b(t)$

Lorsque $b \equiv 0$ est la fonction nulle, on parle d'équation linéaire **homogène**.

Théorème (Cauchy-Lipschitz linéaire)
Soient $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution maximale $u :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est globale, c'est-à-dire que $]t_-, t_+[= J$.

> ⚠️ Le fait que toutes les solutions maximales soient globales est une propriété spécifique aux équations linéaires.

Preuve : On vérifie le critère de sous-linéarité.

- On utilise la norme matricielle $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ qui vérifie $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, $\forall x \neq 0$.
- On pose $f(t, x) = A(t)x + b(t)$, continue.
- Vérifions que f est semi-lipschitzienne. Soit $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$. Soit $\eta > 0$. Pour $|t - t_0| < \eta$, $x, y \in \overline{B}(x_0, \eta)$ on a

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \underbrace{\sup_{t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]} \|A(t)\|}_{< \infty \text{ par continuité de } A} \cdot \|x - y\|$$

  Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz donc satisfaites.
- Vérifions le critère de sous-linéarité :
  Soit $K \subset J$ compact. Pour $t \in K$, $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|f(t, x)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x\| + \|b(t)\| \leq C_1 \|x\| + C_2$$

  avec $C_1 = \sup\limits_{t \in K} \|A(t)\|$ et $C_2 = \sup_{t \in K} \|b(t)\|$, où $C_1 < \infty$ et $C_2 < \infty$ par continuité.

3) La résolvante

On se place dans le cas homogène : $x'(t) = A(t)x(t)$. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses solutions (pour toutes les conditions initiales possibles).

Proposition $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$ de dimension n.

Preuve :

- Il est clair que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$.
- Fixons $t_0 \in J$ et posons

  $$T_{t_0} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^n, \quad f \mapsto f(t_0), \quad \text{linéaire.}$$

  D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, T_{t_0} est surjective (existence) et injective (unicité). Donc T_{t_0} est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'où $\dim(\mathcal{E}) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Proposition Soient $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{E}$. Il y a équivalence entre :

1. $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathcal{E}$.
2. $\forall t_0 \in J$, $(u_1(t_0), \dots, u_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
3. $\exists t_0 \in J$, $(u_1(t_0), \dots, u_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Remarque Si $u_1, \dots, u_n$ est une base de $\mathcal{E}$, alors pour toutes fonction u telle que $u'(t) = A(t)u(t)$, il existe ${}_1, \dots, {}_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in J$ on a $u(t) = {}_1 u_1(t) + \dots + {}_n u_n(t)$.

Définition Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de $\mathcal{E}$. On appelle la **matrice wronskienne** associée à $(u_1, \dots, u_n)$ la matrice $W(t) = \big(\underbrace{u_1(t)}_{\in \mathbb{R}^n} \ \dots \ \underbrace{u_n(t)}_{\in \mathbb{R}^n}\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On vérifie que $W(t)$ est inversible pour tout $t \in J$ et vérifie $W'(t) = A(t)W(t)$, $\forall t \in J$.

Définition Soit $t_0 \in J$. Notons $u_1(t, t_0), \dots, u_n(t, t_0)$ les solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = {}_i = \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \ i^{\text{e}} \end{cases} \qquad \text{avec } ({}_1, \dots, {}_n) \text{ basecanoniuede } \mathbb{R}^n$$

La matrice ${}_A(t, t_0) = (u_1(t, t_0) \quad \dots \quad u_n(t, t_0)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
est appelée **matrice résolvante**.

> C'est la matrice wronskienne dans une base particulière.

Proposition Soit $t_0 \in J$. On a :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} {}_A(t, t_0) = A(t) {}_A(t, t_0) \\ {}_A(t_0, t_0) = I_n \quad (\text{matriceidentité de } \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Si A est de classe $\mathcal{C}^k$, $t \mapsto {}_A(t, t_0)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. En particulier, $u(t) = {}_A(t, t_0)x_0$ est la solution de $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$.

Preuve :

- $_A(t_0,t_0) = (_1,\dots,_n) = I_n$
- Le fait que $\frac{d}{dt}{}_A(t,t_0) = A(t){}_A(t,t_0)$ provient du fait que $t \mapsto {}_A(t,t_0)$ est la matrice wronskienne associée à la base $(_1,\dots,_n)$.
- Ainsi, en posant $u(t) = (t,t_0)x_0$:
  on a bien $u(t_0) = I_n x_0 = x_0$ et

$$u'(t) = \frac{d}{dt}(t,t_0)x_0 = A(t)(t,t_0)x_0 = A(t)u(t).$$

Proposition On a

1. $\forall t_0,t_1,t_2 \in J, \quad {}_A(t_2,t_0) = {}_A(t_2,t_1){}_A(t_1,t_0)$
2. $\forall t_0,t_1 \in J, \quad {}_A(t_0,t_1)^{-1} = {}_A(t_1,t_0)$

Preuve :

1. Soient $t_0,t_1 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On pose $u(t) = {}_A(t,t_0)x_0$, $v(t) = {}_A(t,t_1){}_A(t_1,t_0)x_0$ pour $t \in J$. Il suffit de montrer que $u = v$.
   - $u(t_1) = {}_A(t_1,t_0)x_0$ et $v(t_1) = I_n{}_A(t_1,t_0)x_0$
   - u et v sont solutions de $x'(t) = A(t)x(t)$:

$$u'(t) = \frac{d}{dt}{}_A(t,t_0)x_0 = A(t){}_A(t,t_0)x_0 = A(t)u(t)$$

$$v'(t) = \frac{d}{dt}{}_A(t,t_1){}_A(t_1,t_0)x_0 = A(t){}_A(t,t_1){}_A(t_1,t_0)x_0 = A(t)v(t)$$

   Donc $u = v$.
2. On prend $t_2 = t_0$.

Exemple (n=1) Dans le cas $A(t) = a(t) \in \mathbb{R}$, l'équation devient $x'(t) = a(t)x(t)$. Ainsi,

$$(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$$

> Cependant, en général (pour $n \geq 2$), il est rare de pouvoir donner une expression explicite de la résolvante.
> On verra en revanche que l'on peut obtenir des informations qualitatives sur les solutions grâce à l'étude de la résolvante.

> **Rappel :** Pour $t \in T$, ${}_A(t,t_0) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $\begin{cases} \frac{d}{dt}{}_A(t,t_0) = A(t){}_A(t,t_0) \\ {}_A(t_0,t_0) = I_n \end{cases}$

Proposition (Formule de Liouville) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. La fonction $(t) = \det {}_A(t,t_0)$ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} '(t) = \mathrm{tr}(A(t))(t) \\ (t_0) = 1 \end{cases}$$

Ce qui implique $\det {}_A(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))\,ds\right)$.

Preuve : Vérifions que pour $\in L_n(\mathbb{R})$ la différentielle de $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vaut

$$D\det(H) = \det()\,\mathrm{tr}(^{-1}H) \quad \text{pour } H \in M_n(\mathbb{R})$$

On sit que $\det$ est différentielle comme fonction polynomiale. Alors

$$D\,\det(H) = \lim_{t\to 0} \frac{\det(\ + tH) - \det}{t}$$

Or $\det(\ + tH) = \det()\det(I_n + t^{-1}H)$.
En notant ${}_1, \ldots, {}_n$ les values propres complexes de ${}^{-1}H$, on a

$$\begin{aligned}\det(I_n + t^{-1}H) &= {}_{i=1}^{n}(1 + t_i) \\ &= 1 + \left(\sum_{i=1}^{n} {}_i\right)t + o(t^2) \\ &= 1 + t\,\mathrm{tr}({}^{-1}H) + o(t^2).\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\det(\ + tH) - \det}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \det\ \mathrm{tr}({}^{-1}H)$$

d'où la résultat.

Ainsi, par composition

$$\begin{aligned}{}'(t) &= D_{{}_A(t,t_0)}\left(\frac{d}{dt}{}_A(t,t_0)\right) \\ &= \det {}_A(t,t_0) \times \mathrm{tr}\left({}_A(t,t_0)^{-1}A(t){}_A(t,t_0)\right) \\ &= (t)\,\mathrm{tr}(A(t)).\end{aligned}$$

Remarque Une matrice wronskienne $W(t)$ vérifie $W'(t) = A(t)W(t)$, et on en déduit avec la même preuve qu'en notant ${}_W(t) = \det W(t)$ on a ${}'_W(t) = \mathrm{tr}(W(t)){}_W(t)$, $\forall t \in J$.

Exemple
Résolvons $\begin{cases} x' = -x\tan t + y \\ y' = x + y\tan t \end{cases}$ sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
On a $A(t) = \begin{pmatrix} -\tan t & 1 \\ 1 & \tan t \end{pmatrix}$.
On remarque que $u_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan t \end{pmatrix}$ est solution.
Comment trouver une autre solution ? Idée : utiliser $\mathrm{tr}(A) = 0$. Supposer que $u_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une solution linéairement indépendante. Alors

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & x(t) \\ \tan t & y(t) \end{pmatrix} \qquad \det W(t) = y(t) - \tan t \cdot x(t) = c$$

Donc $y(t) = x(t)\tan t + c = y(t) - x'(t) + c$. Donc $x'(t) = c$. Donc $x(t) = ct + b$. Donc $y(t) = ct\tan t + b\tan t + c$. On prend $b = 0$, $c = 1$. Donc $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t\tan t + 1 \end{pmatrix}$.

Corollaire Si $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{tr}(A(t)) = 0$, alors $\forall s, t \in J$, $\det {}_A(t,s) = 1$.

Il est possible d'interpréter cela comme le fait que l'équation différentielle "conserve les volumes".

Proposition On suppose que $\forall t \in J$, $A(t)$ est antisymétrique (${}^tA(t) = -A(t)$). Alors

1. $\forall t, s \in J$, ${}_A(t,s)$ est une matrice orthogonale ($\det {}_A(t,s) = 1$ et ${}^t{}_A(t,s){}_A(t,s) = I_n$).
2. Si x est solution, $\forall t \in J$, $\|x(t)\| = \|x(t_0)\|$.

Preuve :

1. On sait déjà que $\det {}_A(t,s) = 1$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left({}^t{}_A(t,s){}_A(t,s)\right) &= \frac{d}{dt}\left({}^t{}_A(t,s)\right){}_A(t,s) + {}^t{}_A(t,s)\frac{d}{dt}{}_A(t,s) \\
&= {}^t{}_A(t,s)\,{}^tA(t){}_A(t,s) + {}^t{}_A(t,s)A(t){}_A(t,s) \\
&= {}^t{}_A(t,s)\left({}^tA(t) + A(t)\right){}_A(t,s) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

   Donc ${}^t{}_A(t,s){}_A(t,s)$ est constant, et pour $t = s$ vaut I_n.

2. On a

$$\|x(t)\|^2 = \|(t,t_0)x(t_0)\|^2 = {}^tx(t_0)\,{}^t(t,t_0)(t,t_0)x(t_0) = {}^tx(t_0)x(t_0) = \|x(t_0)\|^2$$