

Cours 9

Théorie générale des équations différentielles

Plan :

1. Problème de Cauchy
2. Existence et unicité
3. Équation d'ordre n

1) Problème de Cauchy

On considère le système appelé **problème de Cauchy**, dont les données sont :

$$(*) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Soit :

1. Un ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
2. Une application continue $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$
3. Un couple $(t_0, x_0) \in U$

Souvent U est de la forme $U = J \times \Omega$ où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.

Remarque Il s'agit en fait d'un système d'équations : si on note $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$, alors $x'(t) = f(t, x(t))$ s'écrit :

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

Définition Une **solution** de ce problème de Cauchy est une fonction dérivable $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

1. I est un intervalle non vide de \mathbb{R} , $t_0 \in I$ et $u(t_0) = x_0$
2. $\forall t \in I, (t, u(t)) \in U$
3. $\forall t \in I, u'(t) = f(t, u(t))$

Ainsi, une solution est en fait un **couple** (u, I) : l'intervalle de définition I fait partie des inconnues.

Remarque f étant supposée continue, toute solution est de classe \mathcal{C}^1 .

Le problème de Cauchy peut se réécrire sous **forme intégrale** :

Proposition Soit $I \neq \emptyset$ un intervalle de \mathbb{R} et $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.q. $\forall t \in I, (t, u(t)) \in U$. Alors u est solution du problème de Cauchy $(*)$ si et seulement si $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie :

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Preuve :

- \Rightarrow Si u est solution : On intègre $u'(s) = f(s, u(s))$ entre t_0 et t .

- $\boxed{\Leftarrow}$ Si $u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$: On a bien $u(t_0) = x_0$. Par continuité de $s \mapsto f(s, u(s))$, la fonction $t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$ est dérivable (et même C^1) de dérivée $f(t, u(t))$, d'où le résultat.

Exemple

- $$\begin{cases} x'(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ avec } U = I \times \mathbb{R}$$

Comme f ne dépend que de t , il y a une unique solution qui est :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds$$

- $$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{\max(x(t), 0)} \\ x(0) = 0 \end{cases} \text{ avec } U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Il n'y a pas unicité : $x(t) = 0$ et $u(t) = \frac{t^2}{4} \mathbb{1}_{t \geq 0}$ sont solutions.

2) Existence et unicité

L'objectif des EDO est de modéliser des processus physiques, qui sont souvent déterministes : si on connaît la dynamique d'un système et une condition initiale à $t = t_0$, alors l'évolution de ce système est unique pour tout t . Cette notion de déterminisme se traduit en termes mathématiques par **l'existence et l'unicité** de solutions, ce qui est donc une nécessité pour un modèle réaliste.

- Pour l'**unicité**, il faudra des conditions supplémentaires (cf. exemple ci-dessus).
- Pour l'**existence**, la forme $x'(t) = f(t, x(t))$ avec f continue est importante.

En effet, par exemple :

$$\begin{cases} x'(t)x(t) + t = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

N'a pas de solution. En effet, si on avait une solution, on aurait $\int_0^t x'(s)x(s) ds + \int_0^t s ds = 0$, et donc $\frac{x(t)^2}{2} + \frac{t^2}{2} = 0$, d'où $x(t) = 0$ et $t = 0 \forall t \in I$, ce qui est absurde.

- L'hypothèse de **continuité** est également importante : on vérifie que

$$\begin{cases} x'(t) = -H(x(t)) \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \text{ avec } H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

n'a pas de solution.

Définition Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. On dit que f est **semi-lipschitzienne** si $\forall (t_0, x_0) \in U, \exists J$ intervalle ouvert contenant $t_0, \exists W$ voisinage ouvert de x_0 t.q. $J \times W \subset U, \exists L > 0$ t.q.

$$\forall t \in J, \forall x, y \in W, \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

(i.e. f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable de manière uniforme en la première $t \in J$)

On rappelle qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes : on peut choisir la norme que l'on veut sur \mathbb{R}^n .

Proposition Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 avec $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert. Alors f est semi-lipschitzienne.

Pour démontrer cela, on utilisera le résultat suivant :

Théorème de la moyenne

Soient $a < b$ dans \mathbb{R} , $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, dérivables sur $]a, b[$ telles que $\|f'(t)\| \leq g'(t)$, $\forall t \in]a, b[$.

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

Dans la suite, on utilisera la notation $B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$ pour la boule ouverte de rayon r et de centre x dans un espace métrique (E, d) , et $\overline{B}(x, r)$ pour la boule fermée.

Preuve de la proposition :

Soit $(t_0, x_0) \in U$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, \rho) \subset U$.

Comme f est \mathcal{C}^1 , $\exists M > 0$ t.q. $\|Df\| \leq M$ sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, \rho)$.

Soit $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ et $x, y \in \overline{B}(x_0, \rho)$.

Posons $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \mapsto f(t, sy + (1-s)x)$.

Alors φ est \mathcal{C}^1 et $\varphi'(s) = Df_{(t, sy+(1-s)x)} \cdot (0, y-x)$.

Ainsi, $\|\varphi'(s)\| \leq M\|x-y\|$. Donc d'après le théorème de la moyenne :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq M\|x-y\|$$

Théorème (Cauchy-Lipschitz : existence et unicité locale)

Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, semi-lipschitzienne. Soit $(t_0, x_0) \in U$, $\eta, \rho, M, L > 0$ tels que $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B}(x_0, \rho) \subset U$ et :

- $\|f(t, x)\| \leq M \quad \forall (t, x) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B}(x_0, \rho)$
 - $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x-y\| \quad \forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta], \forall x, y \in \overline{B}(x_0, \rho)$
- Alors $\forall \varepsilon < \min(\eta, \frac{\rho}{M})$, sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

L'idée est d'appliquer le **théorème du point fixe de Picard** : si (X, d) est un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une contraction, c'est-à-dire $\exists 0 \leq k < 1$ t.q. $\forall x, y \in X, d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y)$, alors T admet un unique point fixe et les itérées de T convergent vers ce point fixe depuis tout point de X .

(Pour l'existence, on montre que la suite des itérées $(T^{(k)}(x))_{k \geq 1}$ est de Cauchy.)

Dans la formulation intégrale, u est une solution sur I ssi elle est un point fixe de :

$$T : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$$

$$u \mapsto (Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Cependant, en général T n'est pas une contraction : il faut faire attention au choix de l'espace.

Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Soit $\varepsilon < \min(\eta, \frac{\rho}{M})$. Posons $X = \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \overline{B}(x_0, \rho))$.

- **Vérifions que $T : X \rightarrow X$, $u \mapsto (Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$ est bien définie :**
Pour $u \in X$, pour $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$:

$$\|(Tu)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \leq |t - t_0| M \leq \varepsilon M \leq \rho$$

Donc $Tu \in X$.

- **Regardons si T est contractante :**

Pour $u, v \in X$,

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_\infty &= \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \left\| \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right\| \\ &\leq \sup_{t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \right| \\ &\leq \varepsilon L \|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

Ainsi, T est lipschitzienne mais pas forcément contractante (si $\varepsilon L \geq 1$).

L'idée consiste à itérer T (méthode de "**Bootstrap**"). En effet, on montre par récurrence que

$\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \forall u, v \in \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \overline{B}(x_0, \rho)), \forall n \geq 0$,

$$\|T^n u(t) - T^n v(t)\| \leq \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \|u - v\|_\infty$$

En effet, c'est vrai pour $n = 0$ (avec $0! = 1$), et si c'est vrai pour n , alors :

$$\|T^{n+1} u(t) - T^{n+1} v(t)\| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|T^n u(s) - T^n v(s)\| ds \right| \leq \frac{L^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \|u - v\|_\infty$$

Donc T^n est $\frac{(L\varepsilon)^n}{n!}$ -lipschitzienne.

Comme $\frac{(L\varepsilon)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on peut choisir n_0 tel que T^{n_0} est contractante. D'après le théorème du point fixe de Picard, T^{n_0} admet un unique point fixe, noté u . Mais alors Tu est aussi un point fixe car $T^{n_0}(Tu) = T(T^{n_0}u) = Tu$. Donc $Tu = u$ par unicité, ce qui conclut l'existence dans X .

- **Pour conclure**, il reste à montrer que si $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution, alors elle reste à valeurs dans $\overline{B}(x_0, \rho)$. Ensuite, par unicité du point fixe dans X , on aura $v = u$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_1 \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ (si $t_1 \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$ le raisonnement est similaire) tel que $\|v(t_1) - x_0\| > \rho$. Soit $t_2 = \inf\{t \in [t_0, t_1] : \|v(t) - x_0\| = \rho\}$. Alors pour $t \in [t_0, t_2]$, $v(t) \in \overline{B}(x_0, \rho)$.

Alors :

$$\rho = \|v(t_2) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t_2} f(s, v(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t_2} \|f(s, v(s))\| ds \leq |t_2 - t_0| M \leq \varepsilon M < \rho$$

ce qui est une contradiction car $\varepsilon < \frac{\rho}{M}$.

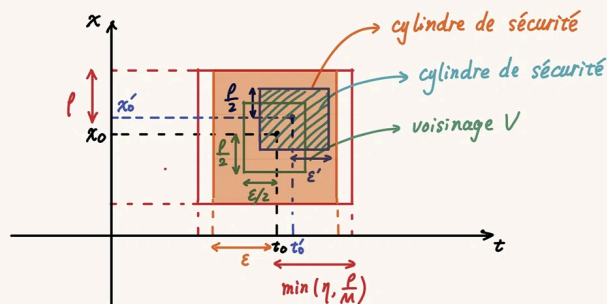
Remarque On dit que $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, \rho)$ est un **cylindre de sécurité** car la solution n'en sort pas.

Corollaire Sous les mêmes hypothèses, $\forall (t_0, x_0) \in U$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et $\varepsilon' > 0$ tel que $\forall (t'_0, x'_0) \in V$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t'_0) = x'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur $[t'_0 - \varepsilon', t'_0 + \varepsilon']$.

Dans les notations de la preuve, on prend $V =]t_0 - \frac{\varepsilon}{2}, t_0 + \frac{\varepsilon}{2}[\times B(x_0, \frac{\rho}{2})$ et $\varepsilon' < \frac{1}{2} \min(\varepsilon, \frac{\rho}{M})$.



Remarques

1. La suite de fonctions définies par récurrence :

$$u_0(t) = x_0, \quad u_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds$$

converge uniformément vers la solution du problème de Cauchy sur un intervalle I suffisamment petit contenant t_0 .

2. On montre par récurrence que si f est de classe C^k , alors les solutions sont de classe C^{k+1} . Ceci permet de calculer par exemple des développements limités (DL).

Exemple Calculons le DL en $t = 0$ à l'ordre 2 de la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t+2}{t^2+x(t)^2} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

On prend $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(t,x) = \frac{t+2}{t^2+x^2}$ pour $(t,x) \in U$, de classe C^∞ . Il existe donc une unique solution u au voisinage de 0, de classe C^∞ .

On a $u(0) = 1$, et $u'(0) = \frac{0+2}{0^2+1^2} = 2$.

En dérivant l'équation, on obtient :

$$u''(t) = \frac{(1) \cdot (t^2 + u(t)^2) - (t+2)(2t + 2u(t)u'(t))}{(t^2 + u(t)^2)^2}$$

En $t = 0$, cela implique $u''(0) = -7$.

Ainsi,

$$u(t) = u(0) + tu'(0) + \frac{t^2}{2}u''(0) + o(t^2) = 1 + 2t - \frac{7}{2}t^2 + o(t^2)$$

3) Équations d'ordre n

Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ avec $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert. On suppose φ semi-lipschitzienne. Considérons l'équation différentielle d'ordre n :

$$y^{(n)}(t) = \varphi(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (*)$$

C'est équivalent à une équation différentielle d'ordre 1 à n inconnues :

Proposition L'équation (*) se réécrit, en posant $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$, par $x'(t) = f(t, x(t))$, où

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, \dots, x_n, \varphi(t, x_1, \dots, x_n))$$

est semi-lipschitzienne.

Preuve :

- On a $x'(t) = (y'(t), \dots, y^{(n)}(t))$,

$$f(t, x(t)) = \left(y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), \varphi \left(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t) \right) \right)$$

d'où la réécriture.

- Pour vérifier le caractère semi-lipschitzien de f :

Soit $(t_0, x_0) \in U$ et I un voisinage de t_0 , W un voisinage de x_0 t.q. $I \times W \subset U$ et $\forall t \in I, \forall x, y \in W$, on a

$$|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)| \leq L \|x - y\|$$

Prenons pour $\| \cdot \|$ la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$. Alors pour $t \in I, x, y \in W$:

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\|_2^2 &= \sum_{i=2}^n |x_i - y_i|^2 + |\varphi(t, x) - \varphi(t, y)|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + L^2 \|x - y\|_2^2 \\ &\leq (1 + L^2) \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien semi-lipschitzienne.