

TD d'Introduction aux Probabilités Discrètes

陈昕昕¹

整理：王道越 郑楚榆



1. Adresse e-mail : xinxin.chen@bnu.edu.cn

Préface

Voici le fascicule des Travaux Dirigés du cours de probabilités discrètes (promotion 2024). Il contient tous les exercices et leurs corrigés. Les TD 1, 2, 3, 5, 7, 8 et 9 ont été préparés par Descartes (Wang Daoyue), et les TD 4 et 6 par Wystan (Zheng Chuyu).

Si vous trouvez des erreurs ou si vous souhaitez obtenir le code source $\text{\LaTeX}$, n'hésitez pas à nous contacter. E-mail : wdy_math@mail.ustc.edu.cn

Table des matières

1	Ensemble fini	7
2	Dénombrement	17
3	Ensemble dénombrable, Espace probabilité	27
4	Espace probabilité	35
5	Variable aléatoires	43
6	Espérance	53
7	Variance et Fonctions génératrices I	61
8	Variance et Fonctions génératrices II	67
9	Loi des grands nombre	79

TD 1. Ensemble fini

Exercice 1. [Principe d'inclusion-exclusion] Soient A, B , et C des sous-ensembles d'un ensemble fini E . Démontrer

$$\begin{aligned}\text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ &\quad - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(C \cap A) + \text{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Solution d'exercice 1.

Rappelons que pour deux ensembles X et Y , on a la formule d'inclusion-exclusion

$$\text{card}(X \cup Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y) - \text{card}(X \cap Y). \quad (*)$$

Appliquons cette formule à $A \cup B \cup C$ en procédant par étapes

$$\begin{aligned}\text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}((A \cup B) \cup C) \\ &= \text{card}(A \cup B) + \text{card}(C) - \text{card}((A \cup B) \cap C) \quad (\text{par } (*)) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) + \text{card}(C) \\ &\quad - \text{card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \quad (\text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup).\end{aligned}$$

Appliquons à nouveau (*) à $(A \cap C) \cup (B \cap C)$:

$$\begin{aligned}\text{card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) &= \text{card}(A \cap C) + \text{card}(B \cap C) - \text{card}((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= \text{card}(A \cap C) + \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

En substituant cette expression dans le calcul précédent, on obtient

$$\begin{aligned}\text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) + \text{card}(C) \\ &\quad - \left(\text{card}(A \cap C) + \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap B \cap C) \right) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ &\quad - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

□

Remarque 1. La formule se généralise par récurrence à n ensembles. Pour une famille finie d'ensembles $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_j \leq n} (-1)^{j-1} \text{card} \left(\bigcap_{k=1}^j A_{r_k} \right).$$

Exercice 2. Soient $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un ensemble fini E . Démontrer

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i).$$

Solution d'exercice 2.

Démontrons cette inégalité par récurrence sur n , le nombre d'ensembles.

Cas de base :

- Pour $n = 1$, on a $\text{card}(A_1) = \text{card}(A_1)$, donc l'inégalité est vérifiée.
- Pour $n = 2$, par (*) et le fait que la cardinal d'un ensemble est non négative, on a

$$\text{card}(A_1 \cup A_2) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) - \text{card}(A_1 \cap A_2) \leq \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2).$$

Hypothèse de récurrence : Supposons que l'inégalité soit vraie pour $n - 1$ ensembles, c'est-à-dire

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \text{card}(A_i).$$

Étape de récurrence : Considérons n ensembles. On peut écrire

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n.$$

En appliquant le cas $n = 2$ à cette union, on obtient

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + \text{card}(A_n).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \text{card}(A_i) + \text{card}(A_n) = \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i).$$

Ce qui complète la démonstration par récurrence. L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$. □

Exercice 3. Pour n et p entiers naturels, avec n non nul, on note $u_{n,p}$ le nombre de n -listes $(x_1, \dots, x_n)$ d'entiers naturels telles que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$. Montrer que, pour $n \geq 2$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n,p} = \sum_{k=0}^p u_{n-1,k}.$$

Solution d'exercice 3.

On définit $E_{n,p}$ comme l'ensemble de toutes les n -listes d'entiers naturels dont la somme vaut p , c'est-à-dire

$$E_{n,p} := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \left| \sum_{i=1}^n x_i = p \right. \right\}.$$

En partitionnant selon la valeur k du n -ième terme x_n , on obtient

$$E_{n,p} = \bigsqcup_{k=0}^p \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}, k) \in \mathbb{N}^n \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i = p - k \right. \right\}.$$

Pour chaque $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_k : E_{n-1,p-k} &\rightarrow \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}, k) \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i = p - k \right. \right\} \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, k) \end{aligned}$$

est une bijection. Les deux ensembles sont donc équipotents.

Par additivité du cardinal sur les unions disjointes

$$\begin{aligned} \text{card}(E_{n,p}) &= \sum_{k=0}^p \text{card}(E_{n-1,p-k}) \\ &= \sum_{k'=0}^p \text{card}(E_{n-1,k'}) \quad (\text{par changement d'indice } k' = p - k) \end{aligned}$$

Par définition de $u_{n,p} = \text{card}(E_{n,p})$, on obtient finalement

$$u_{n,p} = \sum_{k=0}^p u_{n-1,k}.$$

□

Exercice 4. [Principe des tiroirs] Si on place n objets dans m tiroirs, avec $n > m$, il y a un tiroir contient au moins deux objets.

Solution d'exercice 4.

Notons A_k l'ensemble des objets placés dans le k -ième tiroir. On a alors

$$\bigsqcup_{k=1}^m A_k = \{\text{les } n \text{ objets}\}.$$

Par additivité du cardinal pour les unions disjointes :

$$\sum_{k=1}^m \text{card}(A_k) = n.$$

(Raisonnement par l'absurde) Supposons que chaque tiroir contienne au plus un objet, c-à-d

$$\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \text{card}(A_k) \leq 1.$$

On aurait alors

$$n = \sum_{k=1}^m \text{card}(A_k) \leq m,$$

ce qui contredit l'hypothèse $n > m$.

Par l'absurde, il existe donc (au moins) un indice $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que :

$$\text{card}(A_k) \geq 2.$$

□

Exercice 5. [Application du principe des tiroirs]

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Parmi $n + 1$ réels d'intervalle $[0, 1]$, montrer qu'il y en a au moins deux dont la distance est inférieure à $1/n$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère des entiers $a_1, \dots, a_n$ non nécessairement distincts. Montrer qu'on peut trouver un sous-ensemble non vide de cet ensemble d'entier, dont la somme est divisible par n . (Indication : on pourrait considérer les sommes $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \dots$, $s_n = a_1 + \dots + a_n$.)

Solution d'exercice 5.

- a) Partitionnons l'intervalle $[0, 1]$ en n sous-intervalles

$$I_j = \begin{cases} \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right[& \text{si } j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\ \left[\frac{n-1}{n}, 1 \right] & \text{si } j = n. \end{cases}$$

On a bien $\bigsqcup_{j=1}^n I_j = [0, 1]$.

En appliquant le principe des tiroirs aux $n + 1$ réels et n intervalles, il existe deux réels distincts x_a et x_b appartenant à un même intervalle I_j .

Par construction des I_j , on a

$$|x_a - x_b| \leq \text{longueur}(I_j) = \frac{1}{n}.$$

- b) Considérons les sommes partielles $s_k = \sum_{i=1}^k a_i$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Deux cas se présentent

- **Cas 1 :** Si l'un des $s_k \equiv 0 \pmod{n}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\{a_1, \dots, a_k\}$ est le sous-ensemble recherché.
- **Cas 2 :** Si aucun s_k n'est divisible par n , alors les n sommes $s_1, \dots, s_n$ prennent leurs valeurs parmi $n - 1$ classes résiduelles non nulles modulo n .

Par le principe des tiroirs, il existe deux indices $j_1 < j_2$ tels que

$$s_{j_1} \equiv s_{j_2} \pmod{n}.$$

Le sous-ensemble $\{a_{j_1+1}, \dots, a_{j_2}\}$ convient car :

$$s_{j_2} - s_{j_1} = \sum_{i=j_1+1}^{j_2} a_i \equiv 0 \pmod{n}.$$

□

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Combien y a-t-il de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 2 \rrbracket$.
- b) Combien y a-t-il de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 3 \rrbracket$.

Solution d'exercice 6.

- a) Une surjection sur $\{1, 2\}$ signifie que les deux éléments de l'ensemble d'arrivée doivent avoir au moins un antécédent.

Le nombre total d'applications est 2^n . Il faut soustraire les applications qui ne sont pas surjectives, c-à-d

- Celles dont l'image est $\{1\}$: il y en a $1^n = 1$,
- Celles dont l'image est $\{2\}$: il y en a $1^n = 1$.

Ainsi, le nombre de surjections est

$$\boxed{2^n - 2}$$

- b) Le raisonnement est similaire. Le nombre total d'applications est 3^n . Les applications non surjectives sont de trois types

- Celles dont l'image avec cardinal 2 : il y en a $\binom{3}{2} \times (2^n - 2) = 3 \times 2^n - 6$,
- Celles dont l'image avec cardinal 1 : il y en a $\binom{3}{1} \times 1 = 3$.

Ainsi, le nombre de surjections est

$$\boxed{3^n - (3 \times 2^n - 6) - 3 = 3^n - 3 \times 2^n + 3}$$

□

Remarque 2. Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $m \leq n$, le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, m \rrbracket$ est donné par

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Solution d'exercice 6.

Soit $F = \mathcal{F}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket 1, m \rrbracket)$. Notons $A_i = \{f \in F \mid i \notin \text{Im}(f)\}$. Pour I un ensemble d'indice avec la cardinal $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a

$$\text{card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \text{card}(\mathcal{F}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket 1, m \rrbracket \setminus I)) = (m - k)^n.$$

Les surjections correspondent exactement à $\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)^C$. Par le principe d'inclusion-exclusion, on a

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, m \rrbracket \\ \text{card}(I) = k}} (-1)^{k-1} \text{card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m - k)^n.$$

Donc, le nombre de surjections est

$$\text{card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)^C\right) = m^n - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m - k)^n = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m - k)^n.$$

□

Exercice 7. Soit E un ensemble fini de cardinal n . Calculer

$$\sum_{X \subset E} \text{card}(X), \quad \sum_{X, Y \subset E} \text{card}(X \cap Y).$$

Solution d'exercice 7.

a) — **Méthode 1 : Complémentaire**

$$\begin{aligned} \sum_{X \subset E} \text{card}(X) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{X \subset E} \text{card}(X) + \sum_{X^C \subset E} \text{card}(X) \right) \quad (\text{car } X \subset E \iff X^C \subset E) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{X \subset E} \text{card}(X) + \sum_{X' \subset E} \text{card}(X'^C) \right) \\ &\quad (\text{par changement de variable } X' = X^C) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{X \subset E} (\text{card}(X) + \text{card}(X^C)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{X \subset E} \text{card}(E) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^n \cdot n = n2^{n-1}. \end{aligned}$$

— **Méthode 2 : Fonction indicatrice**

$$\begin{aligned} \sum_{X \subset E} \text{card}(X) &= \sum_{X \subset E} \sum_{a \in E} \mathbb{1}_{a \in X} \\ &= \sum_{a \in E} \sum_{X \subset E} \mathbb{1}_{a \in X} \quad (\text{permutation des sommes}) \end{aligned}$$

Pour un élément $a \in E$ fixé, le nombre de sous-ensembles contenant a est

$$\text{card}(\{X \in \mathcal{P}(E) \mid a \in X\}) = 2^{n-1},$$

car l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \{X \in \mathcal{P}(E) \mid a \in X\} &\rightarrow \{X \in \mathcal{P}(E) \mid a \notin X\} \\ X &\mapsto X \setminus \{a\} \end{aligned}$$

est une bijection, et on a la partition :

$$\mathcal{P}(E) = \{X \mid a \in X\} \sqcup \{X \mid a \notin X\}.$$

Ainsi

$$\sum_{X \subset E} \mathbb{1}_{a \in X} = 2^{n-1},$$

et finalement

$$\sum_{X \subset E} \text{card}(X) = \sum_{a \in E} 2^{n-1} = n2^{n-1}.$$

— **Méthode 3 : Classification par cardinal**

Pour chaque sous-ensemble $X \subset E$, son cardinal est bien défini, ce qui permet d'écrire l'identité

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\{\text{card}(X)=k\}} = 1.$$

En substituant cette identité dans la somme originale, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{X \subset E} \text{card}(X) &= \sum_{X \subset E} \text{card}(X) \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\{\text{card}(X)=k\}} \right) \\ &= \sum_{X \subset E} \sum_{k=0}^n \text{card}(X) \cdot \mathbb{1}_{\{\text{card}(X)=k\}} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{X \subset E} k \cdot \mathbb{1}_{\{\text{card}(X)=k\}} \quad (\text{permutation des sommes}) \\ &= \sum_{k=0}^n k \cdot \text{card}(\{X \subset E \mid \text{card}(X) = k\}) \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}. \end{aligned}$$

b) — Méthode 1 : Complémentaire

$$\begin{aligned}
\sum_{X \subset E} \sum_{Y \subset E} \text{card}(X \cap Y) &= \frac{1}{2} \sum_{X \subset E} \left(\sum_{Y \subset E} \text{card}(X \cap Y) + \sum_{Y^C \subset E} \text{card}(X \cap Y) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{X \subset E} \sum_{Y \subset E} (\text{card}(X \cap Y) + \text{card}(X \cap Y^C)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{X \subset E} \sum_{Y \subset E} \text{card}(X) \quad (\text{car } X = (X \cap Y) \sqcup (X \cap Y^C)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{X \subset E} \text{card}(X) \sum_{Y \subset E} 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot n 2^{n-1} \cdot 2^n \quad (\text{d'après le résultat précédent}) \\
&= n 2^{2n-2}.
\end{aligned}$$

— Méthode 2 : Fonction indicatrice

$$\begin{aligned}
\sum_{X \subset E} \sum_{Y \subset E} \text{card}(X \cap Y) &= \sum_{X \subset E} \sum_{Y \subset E} \sum_{a \in E} \mathbb{1}_{a \in X \cap Y} \\
&= \sum_{X \subset E} \sum_{Y \subset E} \sum_{a \in E} \mathbb{1}_{a \in X} \cdot \mathbb{1}_{a \in Y} \\
&= \sum_{a \in E} \sum_{X \subset E} \mathbb{1}_{a \in X} \sum_{Y \subset E} \mathbb{1}_{a \in Y} \quad (\text{permutation des sommes}) \\
&= \sum_{a \in E} (2^{n-1})^2 = n 2^{2n-2}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 8. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de listes d'entiers naturels non nuls dont la somme est n .

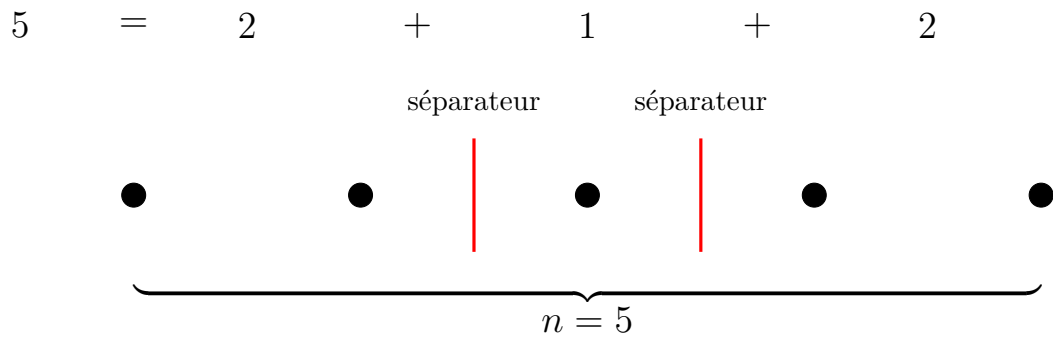
- Calculer a_n pour $n \leq 3$.
- Conjecturer la formule donnant a_n . La démontrer.

Solution d'exercice 8.

- $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$.
- On conjecture que $a_n = 2^{n-1}$. Voici la preuve par la méthode des bâtonnets.

Explication :

- Représentons n par n points alignés : $\underbrace{\bullet \bullet \cdots \bullet}_n$
- Placer des séparateurs entre les points correspond aux décompositions
- Il y a $n - 1$ positions potentielles pour placer des séparateurs
- Chaque séparateur peut être présent ou absent $\rightarrow 2^{n-1}$ possibilités
- Chaque configuration de séparateurs correspond à une manière de décomposer la somme. Comme illustré ci-dessous :



Ainsi, le nombre de listes d'entiers naturels non nuls de somme n est

$$a_n = 2^{n-1}.$$

□

Exercice 9. Un groupe de $2n$ personnes comprend n hommes et n femmes.

- Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs position relative ? (deux dispositions sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite).
- Même question si on veut respecter l'alternance homme-femme.
- Même question si on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus Madame X soit à côté de Monsieur Y ?

Solution d'exercice 9.

- Pour les arrangements circulaires de $2n$ personnes distinctes, le nombre de dispositions distinctes est

$$(2n - 1)!$$

Explication : Les permutations circulaires de k éléments distincts donnent $(k - 1)!$ arrangements (on fixe une personne pour éliminer les rotations identiques).

- Pour l'alternance homme-femme, nous avons deux cas :

$$n! \times (n - 1)!$$

Explication :

- Choisir un point de référence : On choisit une femme particulière (comme point de référence) pour éliminer les rotations équivalentes.
- Arrangement des autres femmes : Les $(n - 1)$ femmes restantes se répartissent sur les $(n - 1)$ places féminines disponibles : $(n - 1)!$
- Arrangement des hommes : Les n hommes occupent les n places masculines avec toutes permutations possibles : $n!$

c) Avec la contrainte supplémentaire :

$$2 \times ((n-1)!)^2$$

Explication :

- On considère le couple (Madame X, Monsieur Y) comme une entité unique
- 2 positions possibles pour ce couple (X à gauche ou Y à gauche)
- Arrangement des autres hommes : $(n-1)!$
- Arrangement des autres femmes : $(n-1)!$
- Total : $2 \times (n-1)! \times (n-1)!$

□

Exercice 10. Etant donné un mot m , on appelle anagramme de m tout mot formé des même lettres que m .

- a) Quel est le nombre d'anagrammes du mot orange.
- b) Quel est le nombre d'anagrammes du mot ananas.
- c) Quel est le nombre d'anagrammes d'un mot contenant n_1 fois la lettre ℓ_1 , n_2 fois la lettre ℓ_2 , ..., et n_p fois la lettre ℓ_p ?

Solution d'exercice 10.

- a) $6! = 720$.
- b) $\frac{6!}{3!2!} = 60$.
- c) $\frac{(n_1 + \dots + n_p)!}{n_1! \dots n_p!}$.

□

TD 2. Dénombrement

Exercice 1. [Formule de Pascal]

- a) Pour n, p des entiers tels que $0 \leq p \leq n$, montrer que

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

- b) Pour n, p des entiers tels que $0 \leq n \leq p$, montrer que

$$\sum_{k=n}^p \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Solution d'exercice 1.

- a)

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{p(n-1)!}{p![(n-1)-(p-1)]!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

- b) Fixons n un entier naturel. Démontrons la propriété par récurrence sur p , pour tout $p \geq n$.

Pour $p = n$,

$$\sum_{k=n}^n \binom{k}{n} = \binom{n}{n} = 1.$$

D'autre part, le terme de droite vaut $\binom{n+1}{n+1} = 1$. L'égalité est donc vérifiée.

Supposons que l'égalité soit vraie pour un certain entier $p \geq n$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=n}^p \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Montrons qu'elle est vraie au rang $p+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{p+1} \binom{k}{n} &= \sum_{k=n}^p \binom{k}{n} + \binom{p+1}{n} \\ &= \binom{p+1}{n+1} + \binom{p+1}{n} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \binom{p+2}{n+1} \quad (\text{d'après la question a}) \end{aligned}$$

L'égalité est donc établie au rang $p+1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, la formule est vraie pour tous entiers n, p tels que $0 \leq n \leq p$. □

Exercice 2. [Formule de Vandermonde] Soit $m, n, p \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

Solution d'exercice 2.

On considère le polynôme $P(x) = (1+x)^{m+n}$. Nous allons calculer le coefficient du terme en x^p de deux manières différentes.

D'après la formule du binôme de Newton :

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k.$$

Le coefficient devant x^p est donc $\binom{m+n}{p}$.

On peut écrire $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n$. En développant chaque facteur, on a :

$$(1+x)^{m+n} = \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right).$$

Le coefficient devant x^p est

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}.$$

(Note : on utilise la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$).

Par unicité des coefficients d'un polynôme, les deux expressions obtenues pour le coefficient de x^p sont égales :

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

□

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

Solution d'exercice 3.

- a) On utilise l'identité $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ (valable pour $n \geq 1, k \geq 1$). Le terme pour $k = 0$ étant nul, on peut commencer la somme à $k = 1$:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}.$$

On reconnaît la somme des coefficients binomiaux $(1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$. Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}}$$

- b) De manière analogue, on utilise l'identité $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ (valable pour $n \geq 2, k \geq 2$). Les termes pour $k=0$ et $k=1$ étant nuls :

$$\sum_{k=0}^n k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n n(n-1)\binom{n-2}{k-2} = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j}.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}}$$

- c) On remarque que $k^2 = k(k-1) + k$. Par linéarité de la somme et en utilisant les deux résultats précédents :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}. \end{aligned}$$

Pour simplifier, on factorise par $n2^{n-2}$ (en notant que $2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2}$) :

$$= n2^{n-2} [(n-1) + 2] = n(n+1)2^{n-2}.$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}}$$

□

Exercice 4. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ à $\llbracket 1, n \rrbracket$ (où $1 \leq p \leq n$)?

Solution d'exercice 4.

Une application strictement croissante est injective, et l'ordre de ses images est imposé. Elle est donc entièrement déterminée par le choix de son ensemble image, qui est une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à p éléments.

Il y a autant d'applications strictement croissantes que de sous-ensembles de cardinal p dans un ensemble de cardinal n , soit $\binom{n}{p}$. □

Exercice 5. Pour un ensemble E fini de cardinal $n \geq 1$, on note u_n le nombre d'involutions de E , c'est à dire d'application $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = \text{id}_E$.

- a) Calculer u_1, u_2 , et u_3 .

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n.$$

Solution d'exercice 5.

a) $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4$.

b) Soit E un ensemble de cardinal $n+2$. Fixons un élément $a \in E$. Pour construire une involution f sur E , on distingue deux cas disjoints selon l'image de a :

— **Cas 1 : a est un point fixe** ($f(a) = a$).

La restriction de f à l'ensemble $E \setminus \{a\}$ est alors une involution sur un ensemble de cardinal $n+1$. Il y a donc u_{n+1} possibilités.

— **Cas 2 : a n'est pas un point fixe.**

Il existe un élément $b \in E \setminus \{a\}$ tel que $f(a) = b$. Comme f est une involution ($f(f(a)) = a$), on a nécessairement $f(b) = a$. La paire $\{a, b\}$ est donc échangée.

— Il y a $n+1$ choix possibles pour l'élément b (parmi les $n+1$ éléments restants).

— Une fois a et b fixés, on doit construire une involution sur le reste de l'ensemble $E \setminus \{a, b\}$, qui est de cardinal n . Il y a u_n façons de le faire.

Il y a donc $(n+1) \times u_n$ possibilités pour ce cas.

En sommant les deux cas, on obtient la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n.$$

□

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Combien y a-t-il de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?

b) Combien y a-t-il de surjections de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?

c) Combien y a-t-il de surjections de $\llbracket 1, n+2 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?

Solution d'exercice 6.

a) $n!$.

b) $\binom{n+1}{2} \cdot n!$.

c) On regroupe les éléments de l'ensemble de départ pour se ramener à une bijection entre n "paquets" et l'ensemble d'arrivée. Comme il y a $n+2$ éléments au départ et n à l'arrivée, il y a deux façons de former ces paquets (ce sont les partitions de l'entier $n+2$ en n parties) :

— **Cas 1 : Un paquet de 3 et $n - 1$ paquets de 1.**

On choisit les 3 éléments à regrouper : $\binom{n+2}{3}$. Il reste n paquets distincts à envoyer bijectivement sur l'arrivée ($n!$ choix).

$$\text{Soit : } \binom{n+2}{3} \times n!$$

— **Cas 2 : Deux paquets de 2 et $n - 2$ paquets de 1.**

On choisit 4 éléments parmi $n + 2$: $\binom{n+2}{4}$. On divise ces 4 éléments en deux paires (il y a 3 façons de le faire : $ab/cd, ac/bd, ad/bc$). Les autres éléments sont seuls. On a ainsi n paquets à envoyer bijectivement ($n!$ choix).

$$\text{Soit : } 3 \binom{n+2}{4} \times n!$$

Au total :

$$n! \left[\binom{n+2}{3} + 3 \binom{n+2}{4} \right].$$

□

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note π_n le nombre de partitions d'un ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On rappelle qu'une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides et deux à deux disjoints, dont la réunion est E . On note, de plus, $\pi_0 = 1$.

- a) Calculer π_1 , π_2 , et π_3 .
- b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_k.$$

Solution d'exercice 7.

- a) $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 2$, $\pi_3 = 5$.
- b) Soit E un ensemble à $n + 1$ éléments, notons x_0 un élément fixé de E (par exemple $n + 1$). Dans toute partition de E , il existe une unique partie A qui contient x_0 . Notons k le nombre d'éléments de E qui ne sont **pas** dans A . Ces éléments forment un sous-ensemble $E' = E \setminus A$ inclus dans $E \setminus \{x_0\}$ (qui est de cardinal n).

Ainsi, k peut prendre n'importe quelle valeur entière entre 0 (si $A = E$) et n (si $A = \{x_0\}$).

Pour un k fixé, construire une partition revient à :

- Choisir les k éléments qui composeront E' parmi les n éléments disponibles dans $E \setminus \{x_0\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles.
- Choisir une partition de cet ensemble E' . Il y a π_k possibilités.
- (Les éléments restants forment alors automatiquement le bloc A avec x_0).

En sommant sur toutes les valeurs possibles de k , on obtient la formule :

$$\pi_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_k.$$

□

Exercice 8. On considère p boules identiques qu'on désire de ranger dans n boîtes numérotées. Combien y a-t-il des rangements distincts ?

Solution d'exercice 8.

$$\binom{p+n-1}{n-1}.$$

□

Exercice 9. [Formule d'inversion de Pascal] Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} b_p$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} a_p.$$

Solution d'exercice 9.

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes. Considérons l'endomorphisme ϕ (opérateur de translation) défini par $\phi(P)(X) = P(X+1)$.

Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots)$, la matrice M de ϕ a pour coefficients $m_{i+1,j+1}$ (ligne $i+1$, colonne $j+1$) les coefficients du binôme issus du développement de $\phi(X^j) = (X+1)^j$:

$$m_{i+1,j+1} = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{si } i \leq j \quad (\text{où } \binom{0}{0} := 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La relation de l'énoncé $a_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} b_p$ s'interprète matriciellement par $A = {}^t M B$, où $A = {}^t(a_0, a_1, \dots)$ et $B = {}^t(b_0, b_1, \dots)$ sont les vecteurs colonnes des suites (a_n) et (b_n) .

Pour inverser la formule, on écrit $B = {}^t M^{-1} A$. La matrice M^{-1} correspond à l'application réciproque ϕ^{-1} , qui est la translation $P(X) \mapsto P(X-1)$. Les coefficients de M^{-1} sont donnés par le développement de $(X-1)^j$:

$$(M^{-1})_{i+1,j+1} = \begin{cases} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui donne la relation cherchée :

$$b_n = \sum_{p=0}^{\infty} ({}^t M^{-1})_{n+1,p+1} a_p = \sum_{p=0}^{\infty} (M^{-1})_{p+1,n+1} a_p = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} a_p.$$

□

Exercice 10. On note d_n le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n ne laissant aucun point fixe.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k.$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

c) En déduire que le nombre de permutations de E , laissant exactement p points fixes ($0 \leq p \leq n$) est

$$\frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Solution d'exercice 10.

a) Soit E un ensemble de cardinal n . Notons $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des permutations de E . Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$, notons $F_\sigma = \{x \in E \mid \sigma(x) \neq x\}$ l'ensemble des points qui ne sont pas fixes. La restriction de σ à F_σ est un dérangement (错位排列) de F_σ .

On partitionne $\mathfrak{S}_E$ selon l'ensemble F_σ . Pour un sous-ensemble $A \subset E$ fixé de cardinal k ($0 \leq k \leq n$), le nombre de permutations dont l'ensemble des points non fixes est exactement A est égal au nombre de dérangements sur A , soit d_k .

Comme il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir un sous-ensemble A de cardinal k , on a par sommation sur k :

$$|\mathfrak{S}_E| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k \implies n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k.$$

b) Par Exercice 9.

c) Pour construire une permutation ayant exactement p points fixes :

- On choisit d'abord l'ensemble des p points fixes parmi les n éléments : il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles.
- Sur les $n - p$ éléments restants, la permutation ne doit avoir aucun point fixe. Il s'agit donc d'un dérangement d'un ensemble de taille $n - p$. Il y a d_{n-p} possibilités.

Le nombre total est donc :

$$\binom{n}{p} d_{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} d_{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times (n-p)! \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

□

Exercice 11. [Théorème de Dirichlet] Soit $x \in \mathbb{R}$.

- a) Soit $N \in \mathbb{Z}$ tel que $N \geq 2$. Montrer qu'il existe des entiers p, q avec $1 \leq q \leq N$ tels que $|qx - p| < 1/N$.

(Indication : on pourrait appliquer le principe des tiroirs pour les nombres réels $x_k = kx - [kx] \in [0, 1[$, avec $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.)

- b) On suppose que x est irrationnel. Montrer qu'il existe une infinité de nombres rationnels p/q tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

- c) Montrer que le résultat tombe en défaut si x est rationnel.

tomber en défaut " = " être faux

Solution d'exercice 11.

- a) Considérons les $N + 1$ réels définis par la partie fractionnaire des multiples de x :

$$u_k = \{kx\} = kx - [kx] \in [0, 1[, \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Divisons l'intervalle $[0, 1[$ en N sous-intervalles (les "tiroirs") de longueur $1/N$:

$$I_j = \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right[, \quad \text{pour } j \in \{0, \dots, N-1\}.$$

D'après le principe des tiroirs, comme il y a $N+1$ points u_k à répartir dans N intervalles I_j , il existe nécessairement au moins deux indices distincts k_1 et k_2 (disons $0 \leq k_1 < k_2 \leq N$) tels que u_{k_1} et u_{k_2} appartiennent au même intervalle I_j .

La distance entre ces deux points est donc strictement inférieure à la longueur de l'intervalle :

$$|u_{k_2} - u_{k_1}| < \frac{1}{N}.$$

En remplaçant par leur expression :

$$|(k_2x - [k_2x]) - (k_1x - [k_1x])| < \frac{1}{N}.$$

Posons $q = k_2 - k_1$ et $p = [k_2x] - [k_1x]$. Comme $0 \leq k_1 < k_2 \leq N$, on a bien $1 \leq q \leq N$. De plus, p est entier. L'inégalité devient :

$$|qx - p| < \frac{1}{N}.$$

- b) Montrons maintenant qu'il existe une infinité de rationnels distincts satisfaisant cette condition. Supposons par l'absurde qu'il n'y en a qu'un nombre fini, notés $r_1, r_2, \dots, r_m$. Comme x est irrationnel, $x \neq r_i$ pour tout i , donc $|x - r_i| > 0$. Posons $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq m} |x - r_i| > 0$.

Choisissons un entier M assez grand tel que $1/M < \varepsilon$. En appliquant le résultat de la question a) avec cet entier M , on trouve une fraction p/q avec $1 \leq q \leq M$ telle que :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Mq} \leq \frac{1}{M} < \varepsilon.$$

Cette fraction p/q est donc une solution qui est strictement plus proche de x que tous les r_i , elle est donc distincte de tous les r_i . Or, comme $1 \leq q \leq M$, on a

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Mq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle l'ensemble des solutions était fini.

- c) Soit $x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(a, b) = 1$. Considérons une fraction $\frac{p}{q}$ quelconque telle que $\frac{p}{q} \neq x$. On a :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{bq}.$$

Comme $x \neq p/q$, le numérateur est un entier non nul, donc $|aq - bp| \geq 1$. Ainsi :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{bq}.$$

Pour que l'inégalité $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$ soit vérifiée, il faudrait que :

$$\frac{1}{bq} < \frac{1}{q^2} \implies q < b.$$

Comme b est fixé, il n'y a qu'un nombre fini de dénominateurs q possibles (et donc un nombre fini de rationnels p/q proches de x). Le résultat de la question b) ne tient donc plus. □

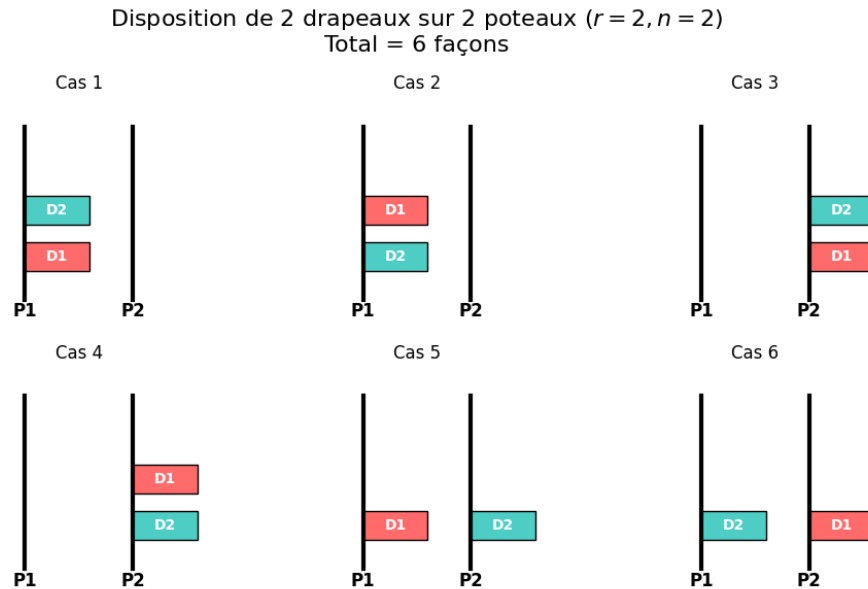
Exercice 12. On considère r drapeaux distincts et n poteaux numérotés, suffisamment grands pour accueillir les r drapeaux.

- a) On suppose $r = 2$ et $n = 2$. De combien de façons peut-on disposer les drapeaux sur les poteaux (on tient compte de l'ordre des drapeaux sur chaque poteau)?
- b) Même question dans le cas général. On pourra raisonner par récurrence sur r .

Solution d'exercice 12.

- a) Comme le montre la figure, il y a 6 façons au total :
- b) Montrons par récurrence sur r que le nombre de dispositions est :

$$N(n, r) = \frac{(n + r - 1)!}{(n - 1)!}.$$



Initialisation : Pour $r = 1$, on a n choix (un pour chaque poteau). La formule donne n . C'est vérifié.

Hérédité : Supposons que pour r drapeaux, le nombre de façons soit $N(n, r) = n(n + 1) \dots (n + r - 1)$. Considérons maintenant $r + 1$ drapeaux. On place d'abord les r premiers drapeaux. Il y a $N(n, r)$ configurations possibles. Dans une configuration donnée, notons k_i le nombre de drapeaux sur le poteau i (avec $\sum k_i = r$). Le $(r + 1)$ -ième drapeau peut être inséré à différents endroits sur chaque poteau i : tout en bas, tout en haut, ou entre deux drapeaux existants. Pour un poteau portant déjà k_i drapeaux, cela crée $k_i + 1$ emplacements possibles.

Le nombre total d'emplacements disponibles pour le $(r + 1)$ -ième drapeau est donc la somme des emplacements sur tous les poteaux :

$$\sum_{i=1}^n (k_i + 1) = \sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^n 1 = r + n.$$

Ainsi, $N(n, r + 1) = N(n, r) \times (n + r)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$N(n, r + 1) = [n(n + 1) \dots (n + r - 1)] \times (n + r).$$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : Le nombre de façons de disposer r drapeaux distincts sur n poteaux est :

$$n(n + 1) \dots (n + r - 1) = \frac{(n + r - 1)!}{(n - 1)!}.$$

□

TD 3. Ensemble dénombrable, Espace probabilité

Exercice 1.

- Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ presque nulles (c-à-d l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ est fini) sont dénombrable.
- Montrer que si A est un ensemble possédant au moins deux éléments, alors $A^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Solution d'exercice 1.

[Généré par DeepSeek]

- Soit $E_k = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f(n) = 0 \text{ pour tout } n \geq k\}$. Alors

$$\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

Chaque E_k est en bijection avec $\mathbb{N}^k$ (par restriction aux k premières valeurs). Comme

- $\mathbb{N}^k$ est dénombrable (produit fini de dénombrables)
- Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable

on conclut que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ est dénombrable.

- Supposons A a au moins deux éléments distincts a et b . Par l'absurde

Si $A^{\mathbb{N}}$ était dénombrable, on pourrait énumérer ses éléments comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Construisons $g \in A^{\mathbb{N}}$ par :

$$g(n) = \begin{cases} a & , \text{ si } f_n(n) = b, \\ b & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors $g \neq f_n$ pour tout n (diagonalisation de Cantor), contradiction. Donc $A^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. □

Exercice 2. Montrer que si A est un ensemble au plus dénombrable et B un ensemble infini, alors $A \cup B$ est en bijection avec B .

Solution d'exercice 2.

Nous allons construire explicitement une bijection entre B et $A \cup B$. **Cas 1 :** Si A est dénombrable, écrivons $A = \{a_n\}_{n \geq 1}$. Comme B est infini, il contient un sous-ensemble dénombrable $D = \{b_n\}_{n \geq 1}$. Construisons la bijection par morceaux :

$$\begin{aligned} f|_D : D &\rightarrow A \cup D & f|_{B \setminus D} : B \setminus D &\rightarrow (A \cup B) \setminus (A \cup D) = B \setminus D \\ b_{2n-1} &\mapsto a_n, & x &\mapsto x. \\ b_{2n} &\mapsto b_n. \end{aligned}$$

La réunion de ces applications donne bien une bijection $f : B \rightarrow A \cup B$.

Cas 2 : Si A est fini, écrivons $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. on prend

$$f|_D : D \rightarrow A \cup D$$

$$b_n \mapsto \begin{cases} a_n & , \text{ si } 1 \leq n \leq k, \\ b_{n-k} & , \text{ si } n > k. \end{cases}$$

Les autres étapes sont identiques à celles du **Cas 1**. □

Exercice 3.

- a) Montrer qu'un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension finie non nulle est dénombrable.
- b) Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

Solution d'exercice 3.

- a) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension $n \geq 1$. Choisissons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E . Alors tout vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique :

$$v = \sum_{i=1}^n r_i e_i \quad \text{avec } r_i \in \mathbb{Q}.$$

L'application

$$f : E \rightarrow \mathbb{Q}^n$$

$$v = \sum_{i=1}^n r_i e_i \mapsto (r_1, \dots, r_n)$$

est une bijection. Comme $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable (produit fini d'ensembles dénombrables), E est dénombrable.

- b) L'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels peut s'écrire :

$$\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}_n[X]$$

où $\mathbb{Q}_n[X] = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k : a_k \in \mathbb{Q} \right\}$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n .

Pour chaque $n \geq 0$, $\mathbb{Q}_n[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension $n+1$ (de base $(1, X, \dots, X^n)$). D'après la question a), chaque $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable.

Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables étant dénombrable, on conclut que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable. □

Exercice 4. On appelle *nombre algébrique* tout nombre complexe racine d'un polynôme non nulle à coefficients rationnels.

- a) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
- b) Existe-t-il des réels non algébriques ?

Solution d'exercice 4.

- a) Soit A l'ensemble des nombres algébriques. On a

$$A = \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X]} \{x \in \mathbb{C} : P(x) = 0\}.$$

Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré d , l'ensemble $\{x \in \mathbb{C} : P(x) = 0\}$ a au plus d éléments. Par conséquent, l'ensemble A est dénombrable.

- b) Oui, parce que A est dénombrable, mais $\mathbb{R}$ est non-dénombrable. □

Exercice 5. Soit $(I_a)_{a \in A}$ une famille d'intervalles ouverts non-vides deux à deux disjoints. Démontrer que A est nécessairement au plus dénombrable.

Solution d'exercice 5.

Pour chaque $a \in A$, choisissons un rationnel $r_a \in I_a \cap \mathbb{Q}$. L'application

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \mathbb{Q} \\ a &\mapsto r_a \end{aligned}$$

est injective car les intervalles sont deux à deux disjoints. Ainsi, A s'injecte dans $\mathbb{Q}$, qui est dénombrable. Par conséquent, A est au plus dénombrable. □

Exercice 6.

- a) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est au plus dénombrable. (Indication : on pourra considérer les ensembles $J(n) = \{x \in]a, b[: |f(x+) - f(x-)| > 1/n\}$.)
- b) Qu'en est-il pour une fonction réelle monotone définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Solution d'exercice 6.

- a) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone (croissante, sans perte de généralité). Soit $A = \{x \in]a, b[: f(x-) \neq f(x+)\}$. Alors, il suffit de montrer que A est au plus dénombrable.

Méthode 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$J(n) = \{x \in]a, b[: |f(x+) - f(x-)| > 1/n\}.$$

Comme f est croissante, le nombre de points où le saut dépasse $1/n$ est fini. En effet, si $x_1 < \dots < x_k$ sont dans $J(n)$, alors

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{i=1}^k (f(x_i+) - f(x_i-)) > k/n,$$

donc $k < n(f(b) - f(a))$. Ainsi, $J(n)$ est fini. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} J(n)$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc au plus dénombrable.

Méthode 2 : Pour chaque $x \in A$, on associe l'intervalle ouvert non vide

$$I_x = (f(x-), f(x+)).$$

Si $x < y$, alors $f(x+) \leq f(y-)$, donc $I_x \cap I_y = \emptyset$. Ainsi, $\{I_x : x \in A\}$ est une famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. D'après l'exercice 5, A est au plus dénombrable.

- b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons D_n l'ensemble des points de discontinuité de f dans l'intervalle $[n, n+1]$. D'après a), chaque D_n est au plus dénombrable. L'ensemble total des points de discontinuité est $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D_n$, qui est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, donc au plus dénombrable. $\square$

Exercice 7. Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Montrer que l'intersection d'une famille non vide quelconque de tribus sur Ω est encore une tribu.
- Montrer qu'il existe des tribus sur Ω contenant $\mathcal{F}$, et que l'intersection de toutes ces tribus, qu'on note $\sigma(\mathcal{F})$, est la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$.
- Montrer que la réunion de deux tribus n'est pas toujours une tribu.

La tribu $\sigma(\mathcal{F})$ est appelée *tribu engendrée* par $\mathcal{F}$.

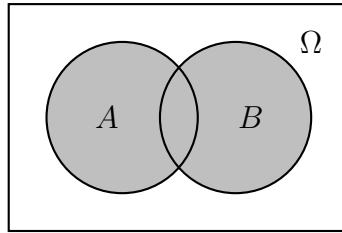
Solution d'exercice 7.

- Soit I quelconque non vide et $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$, $\mathcal{F}_i$ est une tribu sur Ω , I quelconque non vide. $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est une tribu sur Ω car :
 - $\Omega \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$, donc $\Omega \in \mathcal{A}$.
 - Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$, donc $A^C \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$, donc $A^C \in \mathcal{A}$.
 - Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors pour tout $n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- $\{\mathcal{T} : \mathcal{T} \text{ est une tribu sur } \Omega \text{ contenant } \mathcal{F}\}$ est une famille non vide car $\mathcal{P}(\Omega)$ en fait partie. D'après a),

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ tribu} \\ \mathcal{T} \supset \mathcal{F}}} \mathcal{T}$$

est une tribu sur Ω . Par construction, $\sigma(\mathcal{F})$ contient $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{G}$ est une tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$, alors par définition de l'intersection, $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G}$. Donc $\sigma(\mathcal{F})$ est la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$.

- c) Soit A et B deux parties de Ω telles que $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.



Soient $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, B, B^C, \Omega\}$. Alors $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des tribus sur Ω . Cependant, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ n'est pas une tribu sur Ω , car $A \cup B$ n'appartient pas à $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. $\square$

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et f une application de Ω dans un ensemble Ω' .

- Montrer que $\mathcal{A}' = \{B \subset \Omega' : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω' . On l'appelle *tribu image* de $\mathcal{A}$ par f .
- Montrer que $\mathbb{P}_f : B \in \mathcal{A}' \rightarrow \mathbb{P}(f^{-1}(B))$ est une probabilité sur $(\Omega', \mathcal{A}')$. On l'appelle *probabilité image* de $\mathbb{P}$ par f .

Solution d'exercice 8.

- Soit $B_i \in \mathcal{A}'$ pour $i \in I$, où I est un ensemble quelconque non vide. Alors, par définition de $\mathcal{A}'$, $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in I$.
 - Comme $\Omega \in \mathcal{A}$, on a $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{A}$, donc $\Omega' \in \mathcal{A}'$.
 - Si $B \in \mathcal{A}'$, alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Par conséquent, $f^{-1}(B^C) = (f^{-1}(B))^C \in \mathcal{A}$, donc $B^C \in \mathcal{A}'$.
 - Si $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}'$, alors pour chaque $n \geq 1$, $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$.
Donc,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A},$$

ce qui implique que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}'$.

Ainsi, $\mathcal{A}'$ est une tribu sur Ω' .

- Définissons l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_f : \mathcal{A}' &\rightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}(f^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Nous vérifions que $\mathbb{P}_f$ est une probabilité :

- Positivité : Pour tout $B \in \mathcal{A}'$, $\mathbb{P}_f(B) = \mathbb{P}(f^{-1}(B)) \geq 0$ car $\mathbb{P}$ est une probabilité.
- Normalisation : $\mathbb{P}_f(\Omega') = 1$ car $\mathbb{P}_f(\Omega') = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Addition : On considère une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}'$ deux à deux disjoints. Alors,

$$\forall k \neq i, \quad f^{-1}(B_k) \cap f^{-1}(B_i) = f^{-1}(B_k \cap B_i) = \emptyset.$$

On ainsi trouve que

$$\mathbb{P}_f\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \mathbb{P}\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_f(B_n).$$

Ainsi, $\mathbb{P}_f$ est une probabilité sur Ω' . □

Exercice 9. On souhaite démontrer qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisable $([0, 1], \mathcal{P}([0, 1]))$ telle que,

- pour $0 \leq a < b \leq 1$, $\mathbb{P}([a, b]) = b - a$;
- pour $a \in \mathbb{R}$ et $E \subset [0, 1]$ tels que $a + E \subset [0, 1]$, on a $\mathbb{P}(E + a) = \mathbb{P}(E)$.

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'une telle probabilité existe.

- a) Montrer que $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
- b) Considère l'espace quotient $[1/3, 2/3]/\sim$. Pour chaque classe d'équivalence $c \in [1/3, 2/3]/\sim$, on choisit $x_c \in [1/3, 2/3]$ tel que $x_c \in c$. On pose

$$X = \{x_c \in [1/3, 2/3] : c \in [1/3, 2/3]/\sim\}.$$

Pour $r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]$, on pose

$$X_r = \{x + r : x \in X\}.$$

Montrer que

- si $r, r' \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]$, $r \neq r'$ on a $X_r \cap X_{r'} = \emptyset$,
- $[1/3, 2/3] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} X_r \subset [0, 1]$.

- c) Conclure.

Soit $\mathcal{B}$ la tribu sur $[0, 1]$ engendrée par $[a, b]$ avec $0 \leq a < b \leq 1$. En théorie de la mesure, on va construire une telle probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{B}$. La tribu $\mathcal{B}$ est appelée *tribu de Borel*. La probabilité $\mathbb{P}$ est appelée *la mesure de Lebesgue*.

Solution d'exercice 9.

a) Vérifions les propriétés d'une relation d'équivalence :

- Réflexivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, donc $x \sim x$.
- Symétrie : Si $x \sim y$, alors $x - y \in \mathbb{Q}$. Donc $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}$, donc $y \sim x$.
- Transitivité : Si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x - y \in \mathbb{Q}$ et $y - z \in \mathbb{Q}$. Donc $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$, donc $x \sim z$.

Ainsi, $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

b) — Si $X_r \cap X_{r'} \neq \emptyset$, alors il existe $y \in X_r \cap X_{r'}$.

$$y \in X_r \implies y = r + x_1, \text{ avec certain } x_1 \in X,$$

$$y \in X_{r'} \implies y = r' + x_2, \text{ avec certain } x_2 \in X.$$

Donc

$$0 = (r - x_1) - (r' - x_2) = (x_2 - x_1) + (r - r') \implies x_1 \sim x_2.$$

Comme $x_1, x_2 \in X$, on a $x_1 = x_2 \implies r = r'$, ce qui est absurde. Ainsi, $X_r \cap X_{r'} = \emptyset$.

— Pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]$, $X_r = r + X \subset [0, 1]$. Donc, $\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} X_r \subset [0, 1]$.

De plus, on a

$$[1/3, 2/3] = \bigcup_{c \in [1/3, 2/3]/\sim} c = \bigcup_{x_c \in X} c.$$

Pour chaque c , pour tout $y \in c = \{x_c + r : r \in \mathbb{Q}\} \cap [1/3, 2/3]$, on a $y = x_c + r$ avec certain $r \in \mathbb{Q}$. On déduit que $r \in [-1/3, 1/3]$ car $y, x_c \in [1/3, 2/3]$. On a alors $y \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} X_r$. Donc

$$\forall c \in [1/3, 2/3]/\sim, \quad c \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} X_r \implies [1/3, 2/3] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} X_r.$$

c) S'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $([0, 1], \mathcal{P}([0, 1]))$ telle que

- pour $0 \leq a < b \leq 1$, $\mathbb{P}([a, b]) = b - a$;
- pour $a \in \mathbb{R}$ et $E \subset [0, 1]$ tels que $a + E \subset [0, 1]$, on a $\mathbb{P}(E + a) = \mathbb{P}(E)$.

On a $\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} X_r \in \mathcal{P}(\Omega)$, mais

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} X_r\right) &= \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} \mathbb{P}(X_r) \quad (\text{par } \sigma\text{-additivité}) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} \mathbb{P}(X) \\ &= \begin{cases} 0 & , \text{ si } \mathbb{P}(X) = 0, \\ +\infty & , \text{ si } \mathbb{P}(X) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Or, parce que $[1/3, 2/3] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} X_r \subset [0, 1]$, on a

$$1/3 = \mathbb{P}([1/3, 2/3]) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]} X_r\right) \leq \mathbb{P}([0, 1]) = 1,$$

Ceci est une contradiction. Donc, il n'existe pas une telle probabilité $\mathbb{P}$.

□

TD 4. Espace probabilité

Exercice 1. Prouver ou réfuter l'égalité suivante :

$$\binom{2n}{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{k}{k+2i} \binom{k+2i}{i} \binom{2n-k-2i}{n-k-i}, \forall 0 \leq k \leq n,$$

avec la convention que $\frac{k}{k+2i} = 1$ lorsque $k = i = 0$.

Solution d'exercice 1.

On y expose 2 méthodes.

— **Méthode 1** : On considère la fonction génératrice. On définit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{k}{k+2i} \binom{k+2i}{i} \binom{2n-k-2i}{n-k-i} x^n.$$

Alors on peut seulement démontrer que le coefficient de x^n égale $\binom{2n}{n-k}$.

On trouve que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k}{k+2i} \binom{k+2i}{i} \sum_{n=i+k}^{\infty} \binom{2n-k-2i}{n-k-i} x^n \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k}{k+2i} \binom{k+2i}{i} x^{i+k} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+2l}{l} x^l \\ &= A_k(x) B_k(x) \end{aligned}$$

Ici on note $A_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k}{k+2i} \binom{k+2i}{i} x^{i+k}$, $B_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+2l}{l} x^l$. Maintenant, on va démontrer que

$$A_k(x) = x^k \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right)^k \quad B_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right)^k.$$

On définit les fonctions génératrices formelles :

$$t_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right)^k.$$

On vérifie les cas particuliers :

— **Cas** $k = 0$: On développe $(1-4x)^{-1/2}$ en série formelle :

$$(1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n$$

où le coefficient binomial généralisé est

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$$

Par l'identité $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \cdot 4^n$, on obtient

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

Ainsi, on a

$$(1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = B_0(x).$$

D'autre part, $t_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$, donc $B_0(x) = t_0(x)$.

— **Cas** $k = 1$: On a directement

$$t_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \cdot \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} ((1-4x)^{-1/2} - 1).$$

En utilisant $B_0(x) = (1-4x)^{-1/2}$, on trouve

$$t_1(x) = \frac{1}{2x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n - 1 \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{n-1}.$$

Par le changement d'indice $m = n - 1$, on obtient

$$t_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+2}{m+1} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+1}{m} x^m = B_1(x).$$

On établit la relation de récurrence par l'identité de Pascal :

$$\binom{k+2+2l}{l} = \binom{k+1+2l}{l} + \binom{k+1+2l}{l-1},$$

d'où on déduit

$$B_{k+2}(x) = \frac{1}{x} (B_{k+1}(x) - B_k(x)).$$

On vérifie que $t_k(x)$ satisfait la même relation :

$$t_{k+2}(x) = \frac{1}{x} (t_{k+1}(x) - t_k(x)).$$

On prouve l'égalité par récurrence : supposant $B_k(x) = t_k(x)$ et $B_{k+1}(x) = t_{k+1}(x)$ pour un $k \geq 0$, on obtient

$$B_{k+2}(x) = \frac{1}{x} (t_{k+1}(x) - t_k(x)) = t_{k+2}(x).$$

On conclut que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k+2l}{l} x^l = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right)^k$$

De la même manière on a

$$A_k(x) = x^k \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right)^k.$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^k}{1-4x} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \right)^k \\
&= x^k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2l+2k}{l} x^l \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n-k} x^n.
\end{aligned}$$

qui implique la formule qu'on veut par comparer les coefficients.

— **Méthode 2** : On démontre l'identité combinatoire par décomposition de chemins sur une grille, en utilisant le principe de réflexion. On considère les chemins de $(0, 0)$ à $(2n, -2k)$ avec pas $(1, 1)$ (montée) ou $(1, -1)$ (descente). Le nombre total de tels chemins est $\binom{2n}{n-k}$, correspondant au membre gauche de l'égalité.

On observe que chaque chemin atteint pour la première fois la ligne $y = -k$ en un temps T vérifiant $k \leq T \leq 2n - k$ avec $T - k$ pair. Pour le sous-chemin initial de $(0, 0)$ à $(T, -k)$, on utilise le principe de réflexion. Le nombre total de chemins sans restriction est $\binom{T}{\frac{T-k}{2}}$. Les chemins touchant $y \leq -k$ avant T sont en bijection avec les chemins de $(0, -2k)$ à $(T, -k)$ par réflexion par rapport à $y = -k$, ce qui donne $\binom{T}{\frac{T+k}{2}}$ chemins. Ainsi, le nombre de chemins avec première atteinte en T est

$$\binom{T}{\frac{T-k}{2}} - \binom{T}{\frac{T+k}{2}} = \frac{k}{T} \binom{T}{\frac{T-k}{2}}.$$

Pour le sous-chemin final de $(T, -k)$ à $(2n, -2k)$ sans restriction, on a $\binom{2n-T}{\frac{(2n-T)-k}{2}}$ chemins. On somme sur tous les T admissibles en posant $T = k + 2i$ où $i \geq 0$. On obtient alors $\frac{T-k}{2} = i$, $\frac{k}{T} = \frac{k}{k+2i}$, $\binom{T}{\frac{T-k}{2}} = \binom{k+2i}{i}$, et $\binom{2n-T}{\frac{(2n-T)-k}{2}} = \binom{2n-k-2i}{n-k-i}$. Les contraintes $k \leq T \leq 2n - k$ impliquent $0 \leq i \leq n - k$, d'où

$$\binom{2n}{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{k}{k+2i} \binom{k+2i}{i} \binom{2n-k-2i}{n-k-i}.$$

Dans le cas particulier $k = 0$, on interprète le terme $i = 0$ avec $\frac{0}{0} = 1$, et les termes $i \geq 1$ s'annulent, ce qui conserve l'égalité. $\square$

Exercice 2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

- a) Montrer que l'ensemble B des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité d'événements A_n et l'ensemble C des éléments de Ω qui appartiennent à tous les événements A_n sauf un nombre fini sont des événements, en exprimant à l'aide des symboles $\cap$ et $\cup$.

Notation : $B = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$ et $C = \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n$. On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, si $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n$. Dans ce cas, on note simplement $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

b) Montrer que si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right).$$

Solution d'exercice 2.

a)

$$B = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \quad C = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i.$$

b) Il est évident que $\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \supset \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$, donc

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

De la même manière, $\mathbb{P}(C) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$. Parce que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, $B = C$, donc

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

□

Exercice 3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) (**Premier lemme de Borel-Cantelli**) On suppose que la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge.

Montrer que l'événement $\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{p=k}^{\infty} A_p$ est négligeable.

b) (**Second lemme de Borel-Cantelli**) On suppose que la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ diverge et que

les événements A_n sont mutuellement indépendants. Montrer que l'événement $\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{p=k}^{\infty} A_p$ est presque sûr.

c) En déduire que si les événements A_n sont mutuellement indépendants, alors la probabilité de l'événement $\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{p=k}^{\infty} A_p$ ne peut être que 0 ou 1.

Solution d'exercice 3.

a) Par la définition de convergence, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N, \forall n > N$, $\sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \varepsilon$, du coup

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \varepsilon.$$

b) En sachant que les ensembles A_i^C sont mutuellement indépendants,

$$\begin{aligned}
 1 - \mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^C \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^C \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_i^C) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_i)) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n}^{\infty} e^{-\mathbb{P}(A_i)} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

c) Evident en combinant a) et b). □

Exercice 4. Une pièce de monnaie tombe sur pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et sur face avec la probabilité $q = 1 - p$. On la lance une infinité de fois. Montrer que, pour tout $m \geq 1$, il apparaît une infinité de séquences de m piles consécutifs de la façon presque sûre.

Solution d'exercice 4.

On définit $\xi_n \in \{P, F\}$ le résultat du n -ième lancement, et on note $A_n = \{\xi_n = \dots = \xi_{n+m-1} = P\}$. On considère une suite d'événements : $(B_n = A_{m(n-1)})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Il est évident que les événements dans cette suite sont mutuellement indépendants. On sait aussi $\mathbb{P}(B_i) = p^m$.

On note C l'événement dans cette question, alors $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$, donc

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n,$$

Où

$$P_n := \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \geq \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i \right) = 1 - \prod_{i=n+1}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(B_i)) = 1.$$

Donc, $\mathbb{P}(C) = 1$. Cela implique que il apparaît une infinité de séquences de m piles consécutifs de la façon presque sûre. □

Exercice 5. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \min_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq n, i \neq k} \mathbb{P}(A_i \cap A_k) \right).$$

Solution d'exercice 5.

Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) &= \mathbb{P} \left(\left(\bigcup_{i \neq k} A_i \right) \setminus A_k \right) + \mathbb{P}(A_k) \\
 &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{i \neq k} (A_i \setminus A_k) \right) + \mathbb{P}(A_k) \\
 &\leq \sum_{i \neq k} \mathbb{P}(A_i \setminus A_k) + \mathbb{P}(A_k) \\
 &= \sum_{i \neq k} (\mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_i \cap A_k)) + \mathbb{P}(A_k) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i \neq k} \mathbb{P}(A_i \cap A_k).
 \end{aligned}$$

En minimisant le membre de droite sur k , on obtient l'inégalité voulue. $\square$

Exercice 6. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendants. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{(n+2)^2}$.

- Calculer $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.
- Calculer la probabilité qu'un seul des événements A_n se réalise.

Solution d'exercice 6.

- On calcule directement :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq 0} A_n \right) = 1 - \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_n)) = 1 - \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{1}{2}.$$

- On note p le résultat qu'on obtient de la question a) et P la probabilité qu'un seul des événements A_n se réalise.

$$P = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cap \bigcap_{i \neq n} A_i^C \right) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \prod_{k \neq n} \mathbb{P}(A_k^C) = (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}(A_n^C)} = \frac{3}{8}. \quad \square$$

Exercice 7. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Montrer que $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \cdot \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$.
- Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère l'événement C_k : appartenir à A_i pour au moins k valeurs de l'indice i entre 1 et n . Montrer que

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{P}(C_k) \leq \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

Solution d'exercice 7.

- a) On note $a = \mathbb{P}(A_1 \setminus A_2)$, $b = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$, $c = \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1)$, alors $a, b, c \geq 0$. Il faut seulement démontrer $(a + b + c)b \leq (a + b)(b + c)$, qui est évident.
- b) On définit $K_m := \sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{A_k}$ et $C_n^{(m)} := \{K_m \geq n\}$. On a alors

$$C_k^{(n+1)} = \{K_{n+1} \geq k\} = \{K_n \geq k\} \cup (\{K_n \geq k-1\} \cap A_{n+1}) = C_{k-1}^{(n)} \cup (C_k^{(n)} \cap A_{n+1}).$$

Par récurrence, il suffit de montrer que

$$\prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(C_k^{(n+1)}) \leq \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(C_k^{(n)}) \cdot \mathbb{P}(A_{n+1}).$$

Puisque $C_{n-1}^{(n)} \supset C_n^{(n)}$, on a $C_n^{(n+1)} = C_n^{(n)} \cup (C_{n-1}^{(n)} \cap A_{n+1})$ et $C_n^{n+1} = C_n^{(n)} \cap A_{n+1} = C_{n-1}^{(n)} \cap C_n^{(n)} \cap A_{n+1}$. D'après question a), on obtient

$$\mathbb{P}(C_n^{(n+1)}) \mathbb{P}(C_{n+1}^{(n+1)}) \leq \mathbb{P}(C_n^{(n)}) \mathbb{P}(C_{n-1}^{(n)} \cap A_{n+1}).$$

De la même manière, pour tout $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a

$$\prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(C_k^{(n+1)}) \leq \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(C_k^{(n+1)}) \prod_{j=m+1}^n \mathbb{P}(C_j^{(n)}) \cdot \mathbb{P}(C_m^{(n)} \cap A_{n+1}).$$

En prenant $m = 0$, on obtient l'inégalité voulue. $\square$

Exercice 8. Soient b et n deux entiers naturels non nuls. Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On tire au hasard et sans remise les boules jusqu'à ce qu'on obtienne pour la première fois une boule d'une couleur différente des précédentes. Celle-ci est alors remise dans l'urne. On reprend alors la procédure au début. On continue ainsi jusqu'au tirage de la dernière boule (si à la fin, il ne reste plus que des boules d'une seule couleur, on les tire toutes).

Montrer que la probabilité que la dernière boule tirée soit blanche est $\frac{1}{2}$.

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur $n + b$.

Solution d'exercice 8.

Par récurrence sur $n + b$. On suppose que les cas dont $n + b$ est petit sont démontrés.

Pour le premier groupe de tirer, on définit 3 événements : N l'événement qu'on tire toutes les boules noires d'un coup, B l'événement qu'on tire toutes les boules blanches d'un coup, et A les autres situations, alors A, B, N sont mutuellement disjoints, $\mathbb{P}(A \cup B \cup N) = 1$.

On note D l'événement que la dernière boule tirée est blanche, alors $\mathbb{P}(D|B) = 0$, $\mathbb{P}(D|N) = 1$, et par récurrence on sait que $\mathbb{P}(D|A) = \frac{1}{2}$. On peut compter que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(N) = \frac{\binom{n+b}{n}}{\binom{n+b}{n}}$, donc

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D|N) \mathbb{P}(N) = \frac{1}{2}(1 - 2\mathbb{P}(N)) + \mathbb{P}(N) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Exercice 9. Un avion comporte n siège ($n \geq 2$). Chacun des n passagers a une place qui est réservée.

- Le premier passager arrive. Il est distrait et s'installe à une place choisie au hasard.
- Les passagers suivants quand ils arrivent s'installent à leur place sauf si celle-ci est déjà occupée, auquel cas ils choisissent une place au hasard parmi les places restantes.

Déterminer la probabilité que le n -ième passager s'installe à sa place.

Solution d'exercice 9.

On va démontrer par récurrence que cette probabilité est $\frac{1}{2}$. Le cas de $n = 2$ est simple. On suppose que les cas de $2, \dots, n - 1$ sont déjà démontrés.

On numérote les places par le numéro du passager correspondu. Il y a 3 possibilité de la place que le premier passager choisit :

Si elle est la place 1, alors chaque passager choisit sa place, de même pour le dernier passager.

Si elle est la place n , alors le dernier passager ne peut pas choisir sa place.

Si elle est la place m qui n'est pas la place 1 ni la place n , alors les passagers avec le numéro dans $\llbracket 2, m - 1 \rrbracket$ choisissent leur places, et la situation pour les autre $n - m + 1$ passagers est même que le cas de $n - m + 1$, par récurrence on sait que la probabilité que le n -ième passager s'installe à sa place est $\frac{1}{2}$.

De la même manière de l'exercice 9 on sait que la probabilité est $\frac{1}{2}$. □

TD 5. Variable aléatoires

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est paire;} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{si } n \text{ est impaire.} \end{cases}$$

On pose $Y = f(X)$. Déterminer la loi de Y dans les cas suivants :

$$X \sim \mathcal{G}(p), \quad X \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

Solution d'exercice 1.

a) **Cas 1 :** $X \sim \mathcal{G}(p), X \in \mathbb{N}^*$ p.s. (presque sûr)

- ① Support de $Y : Y \in \mathbb{Z}$ p.s.
- ② Calcul des probabilités :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(f(X) = k) \\ &= \mathbb{P}(f(X) = k, 2 \mid X) + \mathbb{P}(f(X) = k, 2 \nmid X) \\ &= \mathbb{P}(X = 2k) + \mathbb{P}(X = 2k - 1) \\ &= (1 - p)^{2k-1} p \underbrace{\mathbb{1}_{2k \geq 1}}_{\mathbb{1}_{k \geq 1}} + (1 - p)^{-2k} p \underbrace{\mathbb{1}_{1-2k \geq 1}}_{\mathbb{1}_{k \leq 0}} \end{aligned}$$

b) **Cas 2 :** $X \sim \mathcal{P}(\lambda), X \in \mathbb{N}$ p.s.

- ① Support de $Y : Y \in \mathbb{Z}$ p.s.
- ② Calcul des probabilités :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(f(X) = k) \\ &= \mathbb{P}(f(X) = k, 2 \mid X) + \mathbb{P}(f(X) = k, 2 \nmid X) \\ &= \mathbb{P}(X = 2k) + \mathbb{P}(X = 2k - 1) \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \underbrace{\mathbb{1}_{2k \geq 0}}_{\mathbb{1}_{k \geq 0}} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^{1-2k}}{(1-2k)!} \underbrace{\mathbb{1}_{1-2k \geq 0}}_{\mathbb{1}_{k \leq 0}} \end{aligned}$$

□

Exercice 2. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre $1/2$. Déterminer la probabilité des événements suivants :

$$\mathbb{P}(X = Y), \quad \mathbb{P}(X > Y), \quad \mathbb{P}(X \geq kY), \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ fixé.}$$

Solution d'exercice 2.

a) **Calcul de $\mathbb{P}(X = Y)$:**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = Y) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{X = Y = k\}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

b) **Calcul de $\mathbb{P}(X > Y)$:** Par symétrie et indépendance des variables, on a ¹

$$\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(Y > X).$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
 1 &= \mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(Y > X) + \mathbb{P}(X = Y) \\
 &= 2\mathbb{P}(X > Y) + \frac{1}{3}. \quad (\text{d'après la question a) })
 \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(X > Y) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

c) **Calcul de $\mathbb{P}(X \geq kY)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé :**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \geq kY) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{y=1}^{\infty} \{X \geq kY, Y = y\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{y=1}^{\infty} \{X \geq ky, Y = y\}\right) \\
 &= \sum_{y=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq ky) \mathbb{P}(Y = y) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{ky} \left(\frac{1}{2}\right)^y \\
 &= \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)y} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1} - 1}.
 \end{aligned}$$

1. Plus précisément

$$\begin{aligned}
 X \stackrel{(\text{loi})}{=} Y &\Rightarrow (X, Y) \stackrel{(\text{loi})}{=} (Y, X) \Rightarrow X - Y \stackrel{(\text{loi})}{=} Y - X \\
 &\Rightarrow \mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X - Y > 0) = \mathbb{P}(Y - X > 0) = \mathbb{P}(Y > X).
 \end{aligned}$$

□

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que X est sans mémoire, c'est-à-dire, pour $k, \ell \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \mathbb{P}(X > \ell).$$

Montrer que X suit une loi géométrique.

Solution d'exercice 3.

Par définition de la probabilité conditionnelle, l'hypothèse de non-mémoire s'écrit

$$\frac{\mathbb{P}(X > k + \ell, X > k)}{\mathbb{P}(X > k)} = \mathbb{P}(X > \ell) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(X > k + \ell) = \mathbb{P}(X > k) \mathbb{P}(X > \ell).$$

On note $q = \mathbb{P}(X > 1) \in [0, 1]$. En prenant $\ell = 1$ dans l'équation précédente, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > k + 1) = \mathbb{P}(X > k) \mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X > k) \cdot q.$$

Par récurrence sur k , on déduit que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > k) = q^k$. La loi de X se déduit alors par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > k + 1) - \mathbb{P}(X > k) = q^{k+1} - q^k = q^k(1 - q).$$

En posant $p = 1 - q$, on reconnaît bien la loi géométrique

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Ce qui montre que $X \sim \mathcal{G}(p)$.

□

Exercice 4. On considère X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, de même loi. On pose $D = X - Y$ et $I = \min(X, Y)$.

a) On suppose que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$, où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

i) Déterminer la loi conjointe de (D, I) .

ii) Déterminer les lois marginales de D et I .

iii) Vérifier que D et I sont indépendantes.

b) On suppose que les variables D et I sont indépendantes et que $\mathbb{P}(X = k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = pq^k.$$

Solution d'exercice 4.

- a) i) $D \in \mathbb{Z}$ p.s. $I \in \mathbb{N}$ p.s. Alors, $(D, I) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ p.s. Calcul des probabilités : $\forall (k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}((D, I) = (k, \ell)) &= \mathbb{P}(X - Y = k, \min(X, Y) = \ell) \\
 &= \mathbb{1}_{k \geq 1} \mathbb{P}(X - Y = k, Y = \ell) + \mathbb{1}_{k \leq -1} \mathbb{P}(X - Y = k, X = \ell) \\
 &\quad + \mathbb{1}_{k=0} \mathbb{P}(X = Y = \ell) \\
 &= \mathbb{1}_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k + \ell, Y = \ell) + \mathbb{1}_{k \leq -1} \mathbb{P}(X = \ell, Y = \ell - k) \\
 &\quad + \mathbb{1}_{k=0} \mathbb{P}(X = \ell, Y = \ell) \\
 &= \mathbb{1}_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k + \ell) \mathbb{P}(Y = \ell) + \mathbb{1}_{k \leq -1} \mathbb{P}(X = \ell) \mathbb{P}(Y = \ell - k) \\
 &\quad + \mathbb{1}_{k=0} \mathbb{P}(X = \ell) \mathbb{P}(Y = \ell) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \mathbb{1}_{k \geq 1} p q^{k+\ell} \cdot p q^\ell + \mathbb{1}_{k \leq -1} p q^\ell \cdot p q^{\ell-k} + \mathbb{1}_{k=0} p q^\ell \cdot p q^\ell \\
 &= p^2 q^{2\ell+|k|}.
 \end{aligned}$$

- ii) Pour D , on a $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(D = k) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{P}((D, I) = (k, \ell)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} p^2 q^{2\ell+|k|} = p^2 q^{|k|} \sum_{\ell=0}^{\infty} q^{2\ell} = \frac{p q^{|k|}}{1+q}.$$

Pour I , on a $\forall \ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(I = \ell) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}((D, I) = (k, \ell)) = p^2 q^{2\ell} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) = p q^{2\ell} (1+q).$$

- iii) On vérifie que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}((D, I) = (k, \ell)) = \mathbb{P}(D = k) \mathbb{P}(I = \ell).$$

C'est évident, donc D et I ne sont indépendantes.

- b) Il suffit de vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)} = \text{Constante}.$$

Par l'indépendance entre X et Y , et l'indépendance entre D et I , on en déduit

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)} &= \frac{\mathbb{P}(X = k+1) \mathbb{P}(Y = k)}{\mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k)} = \frac{\mathbb{P}(X = k+1, Y = k)}{\mathbb{P}(X = k, Y = k)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(D = 1, I = k)}{\mathbb{P}(D = 0, I = k)} = \frac{\mathbb{P}(D = 1) \mathbb{P}(I = k)}{\mathbb{P}(D = 0) \mathbb{P}(I = k)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(D = 1)}{\mathbb{P}(D = 0)} =: q. \quad (\text{constante indépendante de } k)
 \end{aligned}$$

Ceci montre que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$, car c'est la seule loi discrète sur $\mathbb{N}$ vérifiant cette relation de récurrence. $\square$

Exercice 5. Pour $a < b$, notons $N_{a,b}$ le nombre de clients se présentant dans un magasin dans l'intervalle de temps $[a, b[$. Si $a < b < c$, on suppose que les variables $N_{a,b}$ et $N_{b,c}$ sont indépendantes, et que pour $n \in \mathbb{N}$, la loi de $N_{a,b}$ sachant $N_{a,c} = n$ est $\mathcal{B}(n, p)$, avec $p = (b - a)/(c - a)$.

a) Montrer que pour $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b} = k) \mathbb{P}(N_{b,c} = \ell)}{\mathbb{P}(N_{a,c} = k + \ell)} = \binom{k + \ell}{k} p^k (1 - p)^\ell.$$

b) En déduire qu'il existe une constante λ telle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(N_{a,b} = n) = \frac{\lambda}{n} \mathbb{P}(N_{a,b} = n - 1).$$

c) En déduire que $N_{a,b}$ suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Solution d'exercice 5.

a) En utilisant l'hypothèse que $N_{a,b}$, $N_{b,c}$ sont indépendantes et que $N_{a,c} = N_{a,b} + N_{b,c}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(N_{a,b} = k) \mathbb{P}(N_{b,c} = \ell)}{\mathbb{P}(N_{a,c} = k + \ell)} &= \frac{\mathbb{P}(N_{a,b} = k, N_{b,c} = \ell)}{\mathbb{P}(N_{a,c} = k + \ell)} = \frac{\mathbb{P}(N_{a,b} = k, N_{a,c} = k + \ell)}{\mathbb{P}(N_{a,c} = k + \ell)} \\ &= \mathbb{P}(N_{a,b} = k \mid N_{a,c} = k + \ell) = \binom{k + \ell}{k} p^k (1 - p)^\ell, \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de l'hypothèse que la loi conditionnelle est binomiale.

b) Fixons $c > b$ et considérons deux cas particuliers :

Cas 1 ($k = n, \ell = 0$) :

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b} = n) \mathbb{P}(N_{b,c} = 0)}{\mathbb{P}(N_{a,c} = n)} = p^n.$$

Cas 2 ($k = n - 1, \ell = 1$) :

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b} = n - 1) \mathbb{P}(N_{b,c} = 1)}{\mathbb{P}(N_{a,c} = n)} = np^{n-1}(1 - p).$$

En divisant ces deux équations, on obtient

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b} = n)}{\mathbb{P}(N_{a,b} = n - 1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{1 - p} \cdot \frac{\mathbb{P}(N_{b,c} = 1)}{\mathbb{P}(N_{b,c} = 0)} = \frac{\lambda}{n},$$

où $\lambda = \frac{p}{1 - p} \cdot \frac{\mathbb{P}(N_{b,c} = 1)}{\mathbb{P}(N_{b,c} = 0)}$ est une constante indépendante de n .

c) Par récurrence,

$$\mathbb{P}(N_{a,b} = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{P}(N_{a,b} = 0)$$

La condition $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_{a,b} = n) = 1$ impose

$$\mathbb{P}(N_{a,b} = 0) = e^{-\lambda}.$$

On retrouve donc bien la loi de Poisson

$$\mathbb{P}(N_{a,b} = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

□

Exercice 6. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

- a) Justifier qu'on définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère A_n : « n divise X ». Montrer que $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants. En déduire une preuve probabiliste de

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

- c) Montrer que la probabilité qu'aucun carré différent de 1 ne divise X vaut $\frac{1}{\zeta(2s)}$.

Solution d'exercice 6.

- a) Pour justifier que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$ définit une loi de probabilité, on vérifie :
- Positivité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^{-s} > 0$ et $\zeta(s) > 0$ pour $s > 1 \Rightarrow \mathbb{P}(n) > 0$.
 - Somme égale à 1 : $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1$.
- b) **Calcul de la probabilité** $\mathbb{P}(A_n) : \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X \in n\mathbb{Z}) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{X = kn\}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = kn) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(kn)^{-s}}{\zeta(s)} = n^{-s}.$$

Indépendance des $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$: Il suffit de vérifier que pour tout $k \geq 1$ et $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ (k premiers distincts),

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_{p_i}\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(A_{p_i}).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_{p_i}\right) &= \mathbb{P}(p_1 \mid X, \dots, p_k \mid X) \\ &= \mathbb{P}(p_1 \cdots p_k \mid X) \quad (\text{car } \text{pgcd}(p_1, \dots, p_k) = 1) \\ &= \mathbb{P}(A_{p_1 \cdots p_k}) \\ &= (p_1 \cdots p_k)^{-s} \\ &= \prod_{i=1}^k p_i^{-s} = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(A_{p_i}). \end{aligned}$$

Preuve de l'identité d'Euler : L'indépendance des $\{A_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ implique celle de leurs complémentaires. Ainsi

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(A_p^C) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} A_p^C\right) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

On prenant l'inverse, on obtient l'identité

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

- c) En appliquant le même raisonnement aux carrés des nombres premiers, on sait que les événements $\{A_{p^2}^C\}_{p \in \mathcal{P}}$ sont indépendants (car $\text{pgcd}(p_1^2, \dots, p_k^2) = 1$). Donc

$$\mathbb{P}(\forall k \geq 2, k^2 \nmid X) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 2} A_{k^2}^C\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} A_{p^2}^C\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(A_{p^2}^C) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \frac{1}{\zeta(2s)},$$

où le dernier égal vient du résultat de la partie b). $\square$

Exercice 7. Montrer que, si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ , alors la somme $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Solution d'exercice 7.

[Généré par DeepSeek] Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes. Pour démontrer que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$, nous procédons par calcul direct :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi de $X + Y$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{i!(k-i)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k. \quad (\text{d'après la formule du binôme}) \end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à la fonction de masse d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Ainsi

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

□

Exercice 8. Soient X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilité, à valeurs dans $\mathbb{N}$, $p \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et que, pour $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = n\}$ est la loi binomiale de paramètre (n, p) . Déterminer la loi de Y .

Solution d'exercice 8.

1. Support de Y : Comme Y est conditionnellement binomiale sachant $X = n$ et X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a naturellement $Y \in \mathbb{N}$ presque sûrement.

2. Calcul de la loi marginale :

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{Y = k, X = n\}\right) \\
 &= \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(Y = k, X = n) \\
 &= \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(Y = k | X = n) \mathbb{P}(X = n) \\
 &= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
 &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n \geq k} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la variable Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .

□

Exercice 9. On considère une variable aléatoire discrète N à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N = n) \neq 0$. Si la variable N prend la valeur n , on procède à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0, 1[$. On note S et E les variables aléatoires représentant respectivement le nombre de succès et d'échecs dans ces n épreuves.

- a) Montrer que si N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, les variables S et E suivent aussi des lois de Poisson dont on déterminera les paramètres. Montrer que les variables E et S sont indépendantes.
- b) Montrer réciproquement que si E et S sont indépendantes, alors N suit une loi de Poisson. Pour cela, on montrera :

- i) qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour $m, n \in \mathbb{N}$,

$$(m+n)! \mathbb{P}(N = m+n) = u_m v_n.$$

- ii) que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont géométriques.

Solution d'exercice 9.

a) D'après l'exercice 8, lorsque $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a

$$\begin{aligned} S &\sim \mathcal{P}(\lambda p), \\ E &\sim \mathcal{P}(\lambda(1-p)). \end{aligned}$$

Pour démontrer leur indépendance, considérons pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((S, E) = (k, \ell)) &= \mathbb{P}(S = k, N = k + \ell) \\ &= \mathbb{P}(S = k \mid N = k + \ell) \mathbb{P}(N = k + \ell) \\ &= \binom{k + \ell}{k} p^k (1 - p)^\ell \cdot \frac{\lambda^{k + \ell}}{(k + \ell)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \cdot \frac{[(\lambda(1 - p))^\ell]}{\ell!} e^{-\lambda(1 - p)} = \mathbb{P}(S = k) \mathbb{P}(E = \ell). \end{aligned}$$

Ce calcul montre bien l'indépendance de S et E .

b) i) Par l'indépendance de S et E , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = m) \mathbb{P}(E = n) &= \mathbb{P}(S = m, E = n) = \mathbb{P}(S = m, N = m + n) \\ &= \mathbb{P}(S = m \mid N = m + n) \mathbb{P}(N = m + n) = \binom{m + n}{m} p^m (1 - p)^n \mathbb{P}(N = m + n). \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on obtient

$$(m + n)! \mathbb{P}(N = m + n) = \underbrace{\frac{\mathbb{P}(S = m) m!}{p^m}}_{u_m} \cdot \underbrace{\frac{\mathbb{P}(E = n) n!}{(1 - p)^n}}_{v_n}.$$

ii) **Analyse des suites (u_m) et (v_n) :**

Pour établir que les suites (u_m) et (v_n) sont géométriques, nous vérifions que leurs quotients consécutifs sont constants, c-à-d :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \frac{u_{m+1}}{u_m} = \text{Constante}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \text{Constante}.$$

D'après i) , on a l'identité

$$\forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, u_m v_n = (m + n)! \mathbb{P}(N = m + n) = u_{m+1} v_{n-1}$$

En fixant $n = 1$, on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{v_1}{v_0}.$$

En fixant $m = 0$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{u_1}{u_0}.$$

Ce qui montre que les suites (u_m) et (v_n) sont géométriques.

Conséquence sur la loi de N : De plus, en fixant $m = 0$, $n = 1$, on a

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{u_1}{u_0} =: \lambda$$

En substituant dans l'équation initiale, on obtient

$$(m+n)! \mathbb{P}(N = m+n) = u_0 v_0 \lambda^{m+n}.$$

En particulier, pour $n = 0$:

$$m! \mathbb{P}(N = m) = u_0 v_0 \lambda^m \Rightarrow \mathbb{P}(N = m) = \frac{\lambda^m}{m!} u_0 v_0.$$

La condition $\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = m) = 1$ implique

$$u_0 v_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = u_0 v_0 e^{\lambda} = 1 \Rightarrow u_0 v_0 = e^{-\lambda}.$$

La variable aléatoire N suit donc une loi de Poisson de paramètre λ .

□

TD 6. Espérance

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

Solution d'exercice 1.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

L'explication de la permutation des sommes : s'ils convergent, on peut les échanger ; sinon, ils divergent. $\square$

Théorème 1 (Théorème de la convergence monotone). Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles **positives** et Z_{∞} une variable aléatoire réelle positive. Si $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante qui converge vers Z_{∞} presque sûrement, c-à-d

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid (Z_n(\omega))_{n \geq 1} \text{ est croissante et converge vers } Z_{\infty}(\omega)\}) = 1,$$

alors

$$\mathbb{E}[Z_{\infty}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_n].$$

Démonstration générée par DeepSeek. Par croissance de la suite (Z_n) , on a pour tout $n \geq 1$

$$Z_n \leq Z_{n+1} \leq Z_{\infty} \quad \text{p.s.}$$

Donc par croissance de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[Z_n] \leq \mathbb{E}[Z_{n+1}] \leq \mathbb{E}[Z_{\infty}].$$

La suite $(\mathbb{E}[Z_n])_{n \geq 1}$ est ainsi croissante majorée, donc convergente vers une limite $\ell \leq \mathbb{E}[Z_{\infty}]$.

Soit Y une variable aléatoire **étagée** positive telle que $Y \leq Z_{\infty}$.

Définition de étagée : $Y = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i}$ où $c_i \geq 0$ et $A_i \in \mathcal{F}$.

On définit

$$Y_n = Y \wedge Z_n. \quad (\text{minimum de } Y \text{ et } Z_n)$$

Alors

- $Y_n \rightarrow Y$ p.s. (car $Z_n \uparrow Z_{\infty} \geq Y$ et Y est bornée).
- $|Y_n| \leq Y$ et Y est intégrable (car étagée).

Par le **théorème de convergence dominée**, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Y].$$

— Comme $Y_n \leq Z_n$, on a $\mathbb{E}[Y] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_n] = \ell$.

En prenant le supremum sur toutes les fonctions étagées $Y \leq Z_\infty$, on obtient

$$\mathbb{E}[Z_\infty] \leq \ell.$$

Les deux inégalités combinées donnent

$$\mathbb{E}[Z_\infty] = \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_n].$$

□

Exercice 2. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(A_k)$ converge.

- On note $\mathbb{1}_X$ la fonction indicatrice d'un ensemble X . Soit $Z = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}$. Montrer que Z est une variable aléatoire à valeurs discrètes.
- Soit $F = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ appartient à un nombre fini de } A_n\}$. Montrer que F est un événement et que $\mathbb{P}(F) = 1$.
- Montrer que Z est d'espérance finie.

Solution d'exercice 2.

- Il faut vérifier que $\forall n, Z^{-1}(n) := \{\omega : Z(\omega) = n\} \in \mathcal{A}$. On a

$$\{\omega : Z(\omega) \geq n\} = \bigcup_{k_1 < \dots < k_n} \bigcap_{j=1}^n A_{j_k} \in \mathcal{A}.$$

Donc $Z^{-1}(n) = \{\omega : Z(\omega) \geq n\} \setminus \{\omega : Z(\omega) \geq n+1\} \in \mathcal{A}$.

- $F = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^C \in \mathcal{A}$. $F^C = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Or $\sum \mathbb{P}(A_k)$ converge, en sachant le lemme de Borel-Cantelli, on a F^C est négligeable.
- $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{A_k}\right] := \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n\right]$. On va démontrer que l'événement $\{\omega : Z_n(\omega) \rightarrow Z(\omega)\}$ est presque sûr. En fait, cet ensemble est exactement F , et on a déjà démontré que $\mathbb{P}(F) = 1$. Donc, en utilisant le théorème de la convergence monotone (théorème 1), on obtient que

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

□

Exercice 3. [Formule du crible] Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- a) Montrer que $\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_k})$.
 b) En déduire la formule du crible :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right).$$

Solution d'exercice 3.

a)

$$1 - \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \mathbb{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k^C} = \prod_{i=1}^k \mathbb{1}_{A_k^C} = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_k}).$$

b) En utilisant la formule de a), on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k}] = \mathbb{E}\left[1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_k})\right].$$

Puis on obtient la formule qu'on veut par utilisant $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$. □

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes d'un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir tous les numéros entre 1 et n au moins une fois (et à ∞ si on n'obtient jamais les n numéros). Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $m \in \mathbb{N}$, on note $B_{j,m}$ l'événement : « au bout de m tirages, le numéro j n'est pas encore apparu ».

- a) Pour $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, calculer $\mathbb{P}(B_{j_1,m} \cap \dots \cap B_{j_k,m})$.
 b) En déduire que $\mathbb{P}(X > m) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m$.
 c) Calculer $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X > m)$. Interpréter.
 d) Montrer que $\mathbb{E}[X] = n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$.
 e) Montrer que $\mathbb{E}[X] = n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.

Solution d'exercice 4.

Avant la démonstration, il faut vérifier que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ est une variable aléatoire.

- a) $\mathbb{P}(B_{j_1,m} \cap \dots \cap B_{j_k,m}) = \mathbb{P}(\{j_1, \dots, j_k \text{ ne sont pas apparus}\}) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^m$.
 b) $\{X > m\} = \bigcup_{j=1}^m B_{j,m}$. En utilisant l'exercice 3, on a

$$\mathbb{P}(\{X > m\}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{j_1 < \dots < j_k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k B_{j_i,m}\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m.$$

- c) $\forall k, \left(\frac{n-k}{n}\right)^m \rightarrow 0$, donc $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X > m) = 0$. Cela signifie que $X \in \mathbb{N}^*$ presque sûrement et donc $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.
- d) En utilisant l'exercice 1, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

- e) On note

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{k-1} \binom{n}{k} \\ &= \frac{1 - (1-x)^n}{x} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(1-x)^{k-1} - (1-x)^k}{x} \\ &= \sum_{k=1}^n (1-x)^{k-1}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_0^1 (1-x)^{k-1} dx = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[X] = n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

□

Exercice 5. [Inégalité de Le Cam] L'objet de l'exercice est d'étudier l'approximation de la loi de Poisson par la loi binomiale. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- a) Soient X et Y deux telles variable aléatoires. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(Y = k)$. On définit la distance entre X et Y par $d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |p_k - q_k|$.
- i) Montrer que pour $A \subset \mathbb{N}$, on a $|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq d(X, Y)$.
- ii) Démontrer la formula $d(X, Y) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \min(p_k, q_k)$.
- iii) En déduire $d(X, Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$.

- b) Vérifier que pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1 - (1 - x)e^x$ appartient à $[0, 1]$.
- c) Soient $U_1, \dots, U_n, Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que pour $1 \leq i \leq n$, U_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $f(\frac{\lambda}{n})$ et Y_i suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On pose $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$. Enfin, pour $1 \leq i \leq n$, on considère la variable de Bernoulli X_i telle que $X_i = 0$ si $U_i = Y_i = 0$ et $X_i = 1$ sinon.
- i) Déterminer pour $1 \leq i \leq n$, la loi de X_i . En déduire la loi de $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Quelle est la loi de Y .
- ii) Montrer que pour $1 \leq i \leq n$, $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$.
- iii) En déduire *l'inégalité de Le Cam* :

$$d(X, Y) \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Solution d'exercice 5.

a) i)

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |p_k - q_k| \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in A} |p_k - q_k| + \sum_{k \in A^C} |p_k - q_k| \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\left| \sum_{k \in A} p_k - q_k \right| + \left| \sum_{k \in A^C} p_k - q_k \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| + |\mathbb{P}(X \in A^C) - \mathbb{P}(Y \in A^C)|) \\ &= |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|. \end{aligned}$$

ii) En utilisant la formule $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$, on obtient

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \min(p_k, q_k) &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (p_k + q_k - |p_k - q_k|) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \sum_{k=0}^{\infty} |p_k - q_k| \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |p_k - q_k| \\ &= d(X, Y). \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \neq Y) &= 1 - \mathbb{P}(X = Y) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = Y = k) \\
&\geq 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \min(\mathbb{P}(X = k), \mathbb{P}(Y = k)) \\
&= d(X, Y).
\end{aligned}$$

b) À omettre.

- c) i) $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(U_i = 0)\mathbb{P}(Y_i = 0) = 1 - \frac{\lambda}{n}$, c'est-à-dire $X_i \sim \text{Ber}(\frac{\lambda}{n})$, donc $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. $Y \sim \text{Poi}(\frac{\lambda}{n} \times n) = \text{Poi}(\lambda)$.
- ii) $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = \mathbb{P}(X_i = 0, Y_i \neq 0) + \mathbb{P}(X_i = 1, Y_i \neq 1)$. Parce que l'événement $X_i = 0$ implique $Y_i = 0$, on a $\mathbb{P}(X_i = 0, Y_i \neq 0) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_i = 1, Y_i \neq 1) &= \mathbb{P}((U_i \neq 0) \cup (Y_i \neq 0), Y_i \neq 1) \\
&= \mathbb{P}((U_i = 1, Y_i \neq 1) \cup (Y_i \neq 0, 1)) \\
&= \mathbb{P}(U_i = 1, Y_i = 0) + \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(Y_i = k) \\
&= \frac{\lambda}{n} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
d(X, Y) &\leq \mathbb{P}(X \neq Y) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (X_i \neq Y_i)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = \frac{\lambda^2}{n}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq n) > 0$. On appelle *taux de panne* associé à X la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geq n).$$

- a) Exprimer $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k .
- b) i) Montrer qu'on a $0 \leq x_n < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ diverge.

- ii) Réciproquement, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $[0, 1[$ telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ diverge. Montrer qu'il existe une variable aléatoire dont le taux de panne est la suite x_n .
- c) Montrer que la variable X suit une loi géométrique si et seulement si son taux de panne est constant.

Solution d'exercice 6.

- a) On obtient $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$ et $1 - x_n = \mathbb{P}(X \geq n+1 | X \geq n) = \frac{\mathbb{P}(X \geq n+1)}{\mathbb{P}(X \geq n)}$, donc $\forall n \geq 2$,

$$\begin{aligned} p_n = \mathbb{P}(X = n) &= \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geq n)} \frac{\mathbb{P}(X \geq n)}{\mathbb{P}(X \geq n-1)} \cdots \frac{\mathbb{P}(X \geq 2)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} \mathbb{P}(X \geq 1) \\ &= x_n(1 - x_{n-1}) \cdots (1 - x_1), \end{aligned}$$

et on a $p_1 = x_1$.

- b) i) Par a) on sait que $\mathbb{P}(X \geq n+1) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$. Il est évident que $\mathbb{P}(X \geq n+1) \rightarrow 0$, donc il faut seulement démontrer que $\forall n, x_n \neq 1$, c'est au fait que

$$1 - x_n = \mathbb{P}(X \geq n+1 | X \geq n) > 0$$

- ii) On définit que $\mathbb{P}(X = 1) = x_1$ et $\mathbb{P}(X = n) = x_n(1 - x_{n-1}) \cdots (1 - x_1)$ pour $\forall n \geq 2$, alors

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i) = 1$$

- c) Si la suite (x_n) est constante, soit $x_n = p$, on obtient $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$; par contre, on a $\frac{x_n(1 - x_{n-1})}{x_{n-1}} = p_n/p_{n-1} = 1 - p$ est constant, qui implique tous les x_n sont égaux. $\square$

Exercice 7. On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes. À chaque épreuve, la probabilité de succès est $p \in]0, 1[$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Π_n la probabilité qu'au cours des n premières épreuves, on ait obtenu r succès consécutifs.

- a) i) Calculer $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_r$.
- ii) Montrer que pour $n \geq r$, on a $\Pi_{n+1} = \Pi_n + (1 - \Pi_{n-r})p^r(1-p)$.
- iii) Montrer que la suite $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Calculer sa limite.
- b) On définit la variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par le temps d'attente de r succès consécutifs.
- i) Montrer que $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$.
- ii) Montrer que $\mathbb{E}[T] = \frac{1 - p^r}{(1-p)p^r}$.

Solution d'exercice 7.

- a) i) Pour chaque $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, on ne peut pas obtenir r succès au cours des i première épreuves, c'est-à-dire $\Pi_0 = \dots = \Pi_{r-1} = 0$. Si on obtient r succès au cours des r première épreuves, on obtient un succès au cours de chaque épreuve, donc $\Pi_r = p^r$.
- ii)

$$\begin{aligned}\Pi_{n+1} &= \mathbb{P}(\text{on obtient } r \text{ succès consécutifs au cours des } n+1 \text{ première épreuves}) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).\end{aligned}$$

Ici $A = \dots$ n première épreuves, $B =$ on n'obtient pas r succès consécutifs au cours des $n-r$ première épreuve, on obtient un échec de la $n-r+1$ -ième épreuve, mais on réussit de la $n-r+2$ -ième à la $n+1$ -ième épreuve. $\mathbb{P}(A) = \Pi_n$, $\mathbb{P}(B) = (1 - \Pi_{n-r})p^r(1-p)$.

- iii) On obtient que $\Pi_n \leq 1$ parce qu'il est une probabilité, alors la suite (Π_n) est croissante. On sait qu'une suite croissante avec une borne supérieure est convergente. Soit la limite est Π , alors

$$\Pi = \Pi + (1 - \Pi)p^r(1 - p).$$

C'est-à-dire $\Pi = 1$.

- b) i) $\mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 1$.
- ii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(T \leq i)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \Pi_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Pi_{i+r+1} - \Pi_{i+r}}{p^r(1-p)} \\ &= \frac{\Pi - \Pi_r}{p^r(1-p)} \\ &= \frac{1 - p^r}{(1-p)p^r}.\end{aligned}$$

□

TD 7. Variance et Fonctions génératrices I

Exercice 1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire qui suit :

- a) la loi de Bernoulli de paramètre p ;
- b) la loi binomiale de paramètre (n, p) ;
- c) la loi de Poisson de paramètre λ ;
- d) la loi géométrique de paramètre λ .

Retrouver ainsi dans chaque cas son espérance et sa variance.

Solution d'exercice 1.

$$\text{a) } X \sim \mathcal{B}(p) \Rightarrow G_X(t) = t^0 \mathbb{P}(X = 0) + t^1 \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p + pt.$$

$$\text{b) } X \sim \mathcal{Bin}(n, p) \Rightarrow G_X(t) = \sum_{k=0}^n t^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pt)^n.$$

$$\text{c) } X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow G_X(t) = \sum_{n \geq 0} t^n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(t-1)}.$$

$$\text{d) } X \sim \mathcal{Géom}(\lambda) \Rightarrow G_X(t) = \sum_{n \geq 1} t^n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n \geq 1} t^n (1-\lambda)^{n-1} \lambda = \frac{\lambda t}{1 - (1-\lambda)t}.$$

□

Exercice 2. On lance une pièce de monnaie (n.f. 硬币) (la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0, 1[$) jusqu'à l'obtention de la première pile (n.f. 反面). Soit N la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires. Si $N = n$, on relance ensuite n fois la pièce et on appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de piles obtenues au cours de ces n lancers.

- a) Déterminer la loi de N , celle du couple (N, X) , puis la loi de X .
- b) Montrer que X a la même loi que le produit de deux variables indépendantes Y et Z telles que Y suive une loi de Bernoulli et Z une loi géométrique de même paramètre.
- c) En déduire que l'espérance et la variance de X .

Solution d'exercice 2.

- a) — **Méthode 1** : $N \sim \mathcal{Géom}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(N = n, X = k) = (1-p)^{n-1} p \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1}.$$

La loi de X vérifie, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(N = n, X = k) \\ &= \left(\frac{p}{1-p} \right)^{k+1} \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} (1-p)^{2n}. \end{aligned}$$

Pour évaluer cette série, introduisons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n.$$

Pour $x \in]-1, 1[$ et $k \geq 1$, on déduit que

$$\frac{d^k f}{dx^k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n \geq k} n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

En choisissant $x = (1-p)^2 \in]-1, 1[$, il vient

$$\forall k \geq 1, \mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{p}{1-p} \right)^{k+1} \frac{(1-p)^{2k}}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

Et pour $k = 0$,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n, X = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{2n-1} = \frac{1-p}{2-p}.$$

— **Méthode 2 : Fonction génératrice bivariée** $\mathbb{E}[s^N t^X]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s^N t^X] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n t^k \mathbb{P}(N = n, X = k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n t^k \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pts)^k ((1-p)s)^{n-k} (1-p)^{n-1} p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (pts + (1-p)s)^n (1-p)^{n-1} p \\ &= \frac{p(pts + (1-p)s)}{1 - (pts + (1-p)s)(1-p)}. \end{aligned}$$

On prend $s = 1$, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[t^X] &= \frac{p(pt + (1-p))}{1 - (pt + (1-p))(1-p)} \\ &= \frac{pt + (1-p)}{(2-p) - t(1-p)} \\ &= \frac{1-p}{2-p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-1}}{(2-p)^{n+1}} t^n \quad (\text{développement de Taylor}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n. \end{aligned}$$

Étant donné qu'une fonction génératrice détermine une loi unique, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \begin{cases} \frac{1-p}{2-p} & , \text{ si } n = 0, \\ \frac{(1-p)^{n-1}}{(2-p)^{n+1}} & , \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

- b) Soit $Y \sim \mathcal{B}(r)$ et $Z \sim \mathcal{Géom}(r)$. $X \stackrel{(\text{loi})}{=} YZ$, donc X et YZ ont la même fonction génératrice.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[t^{YZ}] &= \mathbb{E}[t^{YZ} \mathbf{1}_{Y=0}] + \mathbb{E}[t^{YZ} \mathbf{1}_{Y=1}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y=0}] + \mathbb{E}[t^Z \mathbf{1}_{Y=1}] \\ &= \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{E}[t^Z] \mathbb{P}(Y = 1) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= 1 - r + \sum_{n=1}^{\infty} (1-r)^{n-1} r \cdot r \\ &= 1 - r + \frac{tr^2}{1 - t(1-r)} \\ &= \frac{1 - r + t(2r - 1)}{1 - t(1-r)}. \end{aligned}$$

En comparant

$$\mathbb{E}[t^X] = \frac{1-p}{2-p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-1}}{(2-p)^{n+1}} t^n,$$

on obtient $r = \frac{1}{2-p}$. Ainsi, X a la même loi que le produit de Y et Z , où $Y \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2-p}\right)$ et $Z \sim \mathcal{Géom}\left(\frac{1}{2-p}\right)$.

- c) Par le résultat de la question précédente, on a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[Y] \mathbb{E}[Z] = r \cdot \frac{1}{r} = 1.$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[Y^2 Z^2] - 1 \\ &= \mathbb{E}[Y^2] \mathbb{E}[Z^2] - 1 \quad (Y \perp\!\!\!\perp Z \Rightarrow Y^2 \perp\!\!\!\perp Z^2) \\ &= \mathbb{E}[Y] \mathbb{E}[Z^2] - 1. \quad (Y \in \{0, 1\} \Rightarrow Y^2 = Y) \end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}[Z^2] = V(Z) + \mathbb{E}[Z]^2 = \frac{1-r}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{2-r}{r^2}.$$

Donc

$$V(X) = \mathbb{E}[Y] \mathbb{E}[Z^2] - 1 = r \cdot \frac{2-r}{r} - 1 = \frac{2}{r} - 2 = 2 - 2p.$$

□

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit

$$X_i^{(m)} = \begin{cases} \text{card}(\{k \in \llbracket 1, m \rrbracket : U_k = i\}), & \text{si } m \geq 1, \\ 0, & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

- Quelle est la loi de $X_i^{(m)}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $m \geq 1$?
- Soient $m \geq 1$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$. Calculer la covariance des variables aléatoires $X_i^{(m)}$ et $X_j^{(m)}$. Sont-elles indépendantes?
- Soient $\lambda > 0$ et N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ , indépendante des variables U_k . On pose pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$Y_i = X_i^{(N)}.$$

- Déterminer, en fonction de λ et n , la loi de Y_i pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Déterminer la loi conjointe de $(Y_1, \dots, Y_n)$.

Solution d'exercice 3.

- On écrit $X_i^{(m)} = \sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{U_k=i}$. On a $\{\mathbb{1}_{U_k=i}\}_{0 \leq k \leq m}$ sont indépendantes car $\{U_k\}_{0 \leq k \leq m}$ sont indépendantes et $\mathbb{1}_{U_k=i} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $X_i^{(m)} \sim \text{Bin}\left(m, \frac{1}{n}\right)$.
- Calculer la covariance des variables aléatoires $X_i^{(m)}$ et $X_j^{(m)}$:

$$\text{Cov}\left(X_i^{(m)}, X_j^{(m)}\right) = \mathbb{E}\left[X_i^{(m)} X_j^{(m)}\right] - \mathbb{E}\left[X_i^{(m)}\right] \mathbb{E}\left[X_j^{(m)}\right].$$

Où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_i^{(m)} X_j^{(m)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{U_k=i} \sum_{k'=1}^m \mathbb{1}_{U_{k'}=j}\right] \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_k=i} \mathbb{1}_{U_k=j}\right] + \sum_{k \neq k'}^m \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_k=i} \mathbb{1}_{U_{k'}=j}\right] \\ &= 0 + \sum_{k \neq k'}^m \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_k=i}\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_{k'}=j}\right] \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \sum_{k \neq k'}^m \mathbb{P}(U_k = i) \mathbb{P}(U_{k'} = j) \\ &= \sum_{k \neq k'}^m \frac{1}{n^2} = \frac{m(m-1)}{n^2}. \\ \mathbb{E}\left[X_i^{(m)}\right] \mathbb{E}\left[X_j^{(m)}\right] &= \left(\frac{m}{n}\right)^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Cov}\left(X_i^{(m)}, X_j^{(m)}\right) = \frac{m(m-1)}{n^2} - \left(\frac{m}{n}\right)^2 = -\frac{m}{n^2} \neq 0.$$

D'où nous concluons que $X_i^{(m)}$ et $X_j^{(m)}$ ($i \neq j$) ne sont pas indépendantes.

c) i) $\forall k \in \mathbb{N}, \{Y_i = k\} = \bigsqcup_{m=0}^{\infty} \{N = m, X_i^{(m)} = k\}$ Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y_i = k) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = m) \mathbb{P}(X_i^{(m)} = k) \quad \left(\text{par l'indépendance de } N \text{ et } X_i^{(m)}\right) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \mathbb{1}_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-k} \\
 &= \sum_{m \geq k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-k} \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \sum_{m \geq k} \frac{(\lambda - \frac{\lambda}{n})^{m-k}}{(m-k)!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k e^{\lambda - \frac{\lambda}{n}} \\
 &= e^{-\frac{\lambda}{n}} \frac{(\frac{\lambda}{n})^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $Y_i \sim \text{Poi}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.

ii) Soit $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $m = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, N et $X_i^{(m)}$ sont indépendantes, alors N et la vector $(X_i^{(m)})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont indépendantes aussi. Ainsi

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y_1 = k_1, \dots, Y_n = k_n) &= \mathbb{P}(N = m, Y_1 = k_1, \dots, Y_n = k_n) \\
 &= \mathbb{P}(N = m) \mathbb{P}(X_1^{(m)} = k_1, \dots, X_n^{(m)} = k_n) \quad \left(\text{car } N \perp\!\!\!\perp (X_i^{(m)})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}\right) \\
 &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\frac{\lambda}{n})^m}{k_1! \dots k_n!} \\
 &= \prod_{i=1}^n e^{-\frac{\lambda}{n}} \frac{(\frac{\lambda}{n})^{k_i}}{k_i!} \\
 &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i = k_i).
 \end{aligned}$$

D'où nous concluons que $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes. $\square$

Exercice 4. [Fonctions génératrices] Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de X la fonction G_X définie par $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$.

a) Montrer que $G_X(t)$ est bien définie si et seulement si, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n$ converge absolument et on a

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n.$$

- b) Montrer que $G_X(t)$ est définie et lisse sur $] - 1, 1[$, continue sur $[-1, 1]$.
- c) Montrer qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si, G_X est dérivable (à gauche) en 1 et que l'on a

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1-).$$

- d) Montrer qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ possède un moment d'ordre r si et seulement si, G_X est r -fois dérivable (à gauche) en 1. On a alors

$$\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = G_X^{(r)}(1-).$$

- e) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que, pour tout réel t tel que $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ soient définies, $G_{X+Y}(t)$ est définie et

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Solution d'exercice 4.

Nous avons déjà fait cet exercice en cours magistral.

□

TD 8. Variance et Fonctions génératrices II

Exercice 1. [Somme aléatoire de variable aléatoires, Formule de Wald] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, toutes de la même loi. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que N et $X_n, n \in \mathbb{N}^*$, sont mutuellement indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad S_0 = 0.$$

- a) Montrer que S_N est une variable aléatoire.
- b)
 - i) Déterminer la loi de S_N , lorsque les X_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p et N la loi de Poisson de paramètre λ .
 - ii) Déterminer la loi de S_N , lorsque les X_k suivent la loi géométrique de paramètre p et N la loi géométrique de paramètre p' .
- c) On suppose que les variables X_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.
 - i) Montrer que $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$.
 - ii) Montrer que, si X_1 et N sont d'espérance finie, alors S_N est aussi d'espérance finie et vérifie *la première formule de Wald*

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[N].$$

- iii) Montrer que, si X_1 et N procèdent un moment d'ordre 2, alors S_N possède aussi un moment d'ordre 2 et vérifie *la seconde formule de Wald*

$$\mathbb{V}(S_N) = \mathbb{V}(X_1) \mathbb{E}[N] + (\mathbb{E}[X_1])^2 \mathbb{V}(N).$$

- d) On revient au cas général. On suppose que X_1 et N sont d'espérance finie, sans supposer que X_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer les deux formules de Wald.

Solution d'exercice 1.

- a) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies les variables aléatoires X_n et N . Une somme finie de v.a.d. réelles est encore une v.a.d. réelle, car

$$\{X_1 + X_2 > a\} = \{X_1 > a - X_2\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{X_1 > a - r\} \cap \{X_2 = r\}) \in \mathcal{A}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est une v.a.d. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Par conséquent, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\{S_N > a\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\{S_n > a\} \cap \{N = n\}) \in \mathcal{A},$$

donc S_N est bien une v.a.d. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- b) i) On conditionne par rapport aux valeurs prises par N (système complet d'événements). Soit $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_N = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_N = k, N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \mathbb{P}(N = n) \quad (\text{par indépendance de } N \text{ et des } X_k) \\
 &= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad (\text{car } S_n \sim \mathcal{B}(n, p)) \\
 &= e^{-\lambda} p^k \sum_{n \geq k} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} \quad (\text{en posant } j = n - k) \\
 &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît une loi de Poisson de paramètre λp . Donc $S_N \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

- ii) On considère les fonctions génératrices,

$$G_{S_n}(t) = \mathbb{E}[t^{S_n}] = \mathbb{E}\left[t^{\sum_{k=1}^n X_k}\right] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[t^{X_k}] = (G_{X_1}(t))^n = \left(\frac{pt}{1 - (1-p)t}\right)^n.$$

Pour tout $t \in [0, 1[$ et $\omega \in \Omega$, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m t^{S_n(\omega)} \mathbb{1}_{N(\omega)=n} = t^{S_{N(\omega)}(\omega)} = t^{S_N(\omega)}.$$

Par le théorème de la convergence monotone (Thm 1), on en déduit que

$$\begin{aligned}
 G_{S_N}(t) &= \mathbb{E}[t^{S_N}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[t^{S_n} \mathbb{1}_{N=n}] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[t^{S_n}] \mathbb{P}(N = n) \quad (\text{indépendance}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{pt}{1 - (1-p)t}\right)^n (1-p')^{n-1} p' \\
 &= p' \frac{pt}{1 - (1-p)t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1-p')pt}{1 - (1-p)t}\right)^k \\
 &= \frac{pp't}{1 - (1 - pp')t}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une loi géométrique. Donc $S_N \sim \mathcal{Géom}(pp')$.

c) i) Pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} G_{S_N}(t) &= \mathbb{E} [t^{S_N}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} [t^{S_N}] \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_{X_1}(t))^n \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{E} \left[(G_{X_1}(t))^N \right] = G_N(G_{X_1}(t)). \end{aligned}$$

ii) D'après la formule de dérivation des fonctions composées, on a

$$G'_{S_N}(s) = G'_N(G_{X_1}(s)) \cdot G'_{X_1}(s).$$

Lorsque $s \uparrow 1$, $G_{X_1}(s) \uparrow 1$. Comme les espérances sont finies, les dérivées à gauche en 1 existent et valent les espérances. Donc

$$G'_{S_N}(1) = G'_N(1) \cdot G'_{X_1}(1) \implies \mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X_1].$$

iii) De même, on calcule la dérivée seconde de $G_{S_N}(t)$.

d) On suppose maintenant que $X_1 \in L^1$ (resp. L^2) est une v.a. réelle quelconque.

— **Première formule de Wald** : Par la définition de S_N , on a

$$\sum_{k=1}^m X_k \mathbb{1}_{k \leq N} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} S_N.$$

Par le théorème de la convergence monotone (Thm 1), on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_N] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{k \leq N}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k] \mathbb{P}(k \leq N) \quad (\text{par indépendance de } N \text{ et des } (X_k)) \\ &= \mathbb{E}[X_1] \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k) \\ &= \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[N]. \quad (\text{par TD6 Ex1}) \end{aligned}$$

— **Seconde formule de Wald** :

$$\begin{aligned} S_N^2 &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j \mathbb{1}_{j \leq N} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbb{1}_{k \leq N} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} X_j^2 \mathbb{1}_{j \leq N} + \sum_{j \neq k} X_j X_k \underbrace{\mathbb{1}_{j \leq N} \mathbb{1}_{k \leq N}}_{\mathbb{1}_{N \geq \max\{j, k\}}}. \end{aligned}$$

Passons à l'espérance, en utilisant la théorème de la convergence monotone, on a,

— pour le premier terme,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{\infty} X_j^2 \mathbb{1}_{j \leq N} \right] &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} [X_j^2 \mathbb{1}_{j \leq N}] \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} [X_j^2] \mathbb{P}(j \leq N) \quad (\text{car } N \perp\!\!\!\perp X_j) \\
 &= \mathbb{E} [X_1^2] \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(j \leq N) \\
 &= \mathbb{E} [X_1^2] \mathbb{E} [N].
 \end{aligned}$$

— pour le deuxième terme,

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left[\sum_{j \neq k} X_j X_k \mathbb{1}_{N \geq \max\{j, k\}} \right] \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{E} [X_j] \mathbb{E} [X_k] \mathbb{P}(N \geq j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbb{E} [X_j] \mathbb{E} [X_k] \mathbb{P}(N \geq k) \right) \\
 &= \mathbb{E} [X_1]^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}(N \geq j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k) \right) \\
 &= \mathbb{E} [X_1]^2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \mathbb{P}(N \geq j) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k) \sum_{j=1}^{k-1} 1 \right] \\
 &= \mathbb{E} [X_1]^2 \cdot 2 \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \mathbb{P}(N \geq j),
 \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \mathbb{P}(N \geq j) &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \sum_{n=j}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{j=1}^n (j-1) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) n(n-1) \\
 &= \mathbb{E} [N^2] - \mathbb{E} [N].
 \end{aligned}$$

En combinant les deux termes, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [S_N^2] &= \mathbb{E} [X_1^2] \mathbb{E} [N] + \mathbb{E} [X_1]^2 (\mathbb{E} [N^2] - \mathbb{E} [N]) \\
 &= (\mathbb{E} [X_1^2] - \mathbb{E} [X_1]^2) \mathbb{E} [N] + \mathbb{E} [N^2] \\
 &= \mathbb{V}(X_1) \mathbb{E} [N] + \mathbb{E} [X_1]^2 \mathbb{E} [N^2].
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{E}[S_n^2] - \mathbb{E}[S_n]^2 \\ &= \mathbb{V}(X_1) \mathbb{E}[N] + \mathbb{E}[X_1]^2 \mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 \mathbb{E}[N]^2 \\ &= \mathbb{V}(X_1) \mathbb{E}[N] + \mathbb{E}[X_1]^2 \mathbb{V}(N).\end{aligned}$$

□

Exercice 2. [Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, sur le même espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi définie par

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p,$$

où $p \in [0, 1]$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

La suite (S_n) est appelée marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$. On peut imaginer un mobile partant de l'origine et se déplaçant à chaque instant (entier) de 1 ou -1 , les déplacements successifs étant indépendants. Alors S_n représente la position du mobile au bout de n déplacements.

a) i) Déterminer $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$, pour tout n .

ii) On note $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n x^n$. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}}.$$

b) Pour tout entier naturel non nul k , on note A_k l'événement "le mobile retourne pour la première fois à l'origine au bout k déplacements", c'est-à-dire

$$A_k = \{S_k = 0\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{S_i \neq 0\} \right).$$

On pose $v_k = \mathbb{P}(A_k)$, pour tout $k \geq 1$ et $v_0 = 0$.

i) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$\mathbb{P}(\{S_n = 0\}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap A_k).$$

ii) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a

$$u_n = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k.$$

c) On note $g(x)$ la somme de la série entière $\sum v_n x^n$.

i) Montrer que le rayon définissant $g(x)$ est supérieur ou égal à 1. Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, g(x) = \frac{f(x) - 1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}.$$

- ii) Déterminer la probabilité de l'événement A : "il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = 0$ ".

On suppose dans le reste de l'exercice que $p = \frac{1}{2}$.

- d) i) Montrer que l'on peut définir une variable aléatoire T égale au premier indice n non nul pour lequel l'événement $\{S_n = 0\}$ est réalisé.

- ii) Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{2n} = \frac{2 \binom{2n-2}{n-1}}{n4^n}.$$

- iii) La variable T est-elle d'espérance finie ?

- e) i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}.$$

- ii) Démontrer que la probabilité que le mobile soit à l'origine à l'issue des $2n$ premiers déplacements est égale à la probabilité qu'il ne soit jamais à l'origine à l'issue d'aucun des $2n$ premiers déplacements. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0)$.

Solution d'exercice 2.

- a) i) On a $u_0 = 1$, $u_{2n-1} = 0$ pour tout $n \geq 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

- ii) La série de Taylor de $(1 - 4p(1-p)x^2)^{-\frac{1}{2}}$ développée en 0 est

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \cdot 2^n}{n!} p^n (1-p)^n x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n x^{2n} = f(x).$$

Comme $u_n \in [0, 1]$, le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1.

Par conséquent, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}}.$$

- b) i) Les événements A_k pour $k = 1, \dots, n$ sont deux à deux disjoints, donc

$$\{S_n = 0\} = \bigcup_{k=1}^n (\{S_n = 0\} \cap A_k).$$

Par additivité de la probabilité,

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap A_k).$$

ii) D'après la définition de A_k , on a

$$\{S_n = 0\} \cap A_k = \{S_n = 0\} \cap \{S_k = 0\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{S_i \neq 0\} \right) = \{S_n - S_k = 0\} \cap A_k.$$

L'événement $\{S_n - S_k = 0\} = \{X_{k+1} + \dots + X_n = 0\}$ est indépendant de A_k , car ils dépendent de familles disjointes de variables (X_i) . Ainsi,

$$\mathbb{P}(\{S_n - S_k = 0\} \cap A_k) = \mathbb{P}(S_n - S_k = 0) \cdot \mathbb{P}(A_k) = u_{n-k} v_k.$$

En reportant dans la relation du (a), on obtient pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k,$$

avec la convention $v_0 = 0$.

c) i) Comme $v_n \in [0, 1]$, le rayon de convergence de la série entière $\sum v_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

La relation $u_n = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k$ pour $n \geq 1$ implique, par la formule de multiplication de Cauchy,

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k \right) x^n = u_0 v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = f(x) - 1.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$g(x) = \frac{f(x) - 1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}.$$

ii) La probabilité de l'événement $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{S_n = 0\}$ vaut

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \lim_{x \uparrow 1} g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)} = 1 - |1 - 2p|.$$

d) i) On définit $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Ainsi T est une application de Ω dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, on a

$$\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}^*) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{x \uparrow 1} g(x) = 1,$$

c'est-à-dire que T est presque sûrement finie. Donc T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, égale au premier instant n non nul tel que $S_n = 0$.

ii) Pour $p = \frac{1}{2}$, on a $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. En développant en série entière au voisinage de 0, on obtient

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!2^{2n-1}} x^{2n}.$$

Par identification, pour tout $n \geq 1$,

$$v_{2n} = \frac{2 \binom{2n-2}{n-1}}{n \cdot 4^n}.$$

iii) La fonction génératrice de T est donnée par

$$\mathbb{E}[t^T] = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k v_k = g(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}.$$

On en déduit

$$\mathbb{E}[T] = \lim_{t \uparrow 1} g'(t) = \lim_{t \uparrow 1} \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} = +\infty.$$

Ainsi T n'est pas d'espérance finie.

e) i) Pour $p = \frac{1}{2}$, on vérifie directement que

$$v_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n},$$

$$\text{où } u_{2n} = \binom{2n}{n} 4^{-n}.$$

ii) On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2n} \{S_i \neq 0\}\right) = \mathbb{P}(T > 2n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_{2k} = u_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

Par symétrie de la marche aléatoire (puisque $p = \frac{1}{2}$), la probabilité que le mobile reste strictement au-dessus de l'origine pendant les $2n$ premiers pas est la moitié de la probabilité qu'il ne soit jamais à l'origine. Ainsi,

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2n} \{S_i \neq 0\}\right) = \frac{1}{2} u_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2 \cdot 4^n}.$$

□

Remarque 1. Dans a) ii), en plus du développement de Taylor, on peut aussi utiliser l'unicité de la solution d'une équation différentielle pour montrer que cette série converge vers $\frac{1}{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on dit que $\sigma(i)$ est un maximum (resp. minimum) provisoire de σ si

$$\sigma(i) = \max\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)\}, \quad (\text{resp. } \sigma(i) = \min\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)\}).$$

On désigne par X_n (resp. Y_n) la variable aléatoire représentant le nombre de maximums (resp. minimums) provisoires d'une permutation aléatoire de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Montrer que X_n et Y_n ont la même loi.

b) i) Déterminer la loi de X_3 , son espérance, et sa variance.

ii) Déterminer la loi du couple (X_3, Y_3) et sa covariance.

- c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction génératrice de X_n .
- i) Pour $1 \leq k \leq n$, on note Z_k la variable indicatrice de l'événement « $\sigma(k)$ est un maximal provisoire ».
 - ii) Exprimer X_n en fonction de $Z_1, \dots, Z_n$. En déduire g_n .
 - iii) En déduire $\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2), \mathbb{P}(X_n = n)$.
 - iv) Déterminer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Solution d'exercice 3.

- a) On définit une transformation T préservant la mesure de $\mathfrak{S}_n$ donnée par $T(\sigma)(i) = n + 1 - \sigma(i)$. On a alors

$\sigma(k)$ est un maximum provisoire de $\sigma \Leftrightarrow T(\sigma)(k)$ est un minimum provisoire de $T(\sigma)$.

Donc $X_n = Y_n \circ T \stackrel{\text{loi}}{=} Y_n$.

- b) i) $\mathbb{E}[X_3] = \frac{11}{6}, \mathbb{V}(X_3) = \frac{17}{36}$.
 ii) $\text{Cov}(X_3, Y_3) = -\frac{13}{36}$.
- c) i) On note $Z_k^{(n)}$ la variable indicatrice de l'événement « $\sigma(k)$ est un maximum provisoire de σ », pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Pour $k \geq 1$ fixé et tout $n \geq k$, la probabilité que le plus grand des k premiers nombres d'une permutation de n se trouve à la position k est $\frac{1}{k}$. Donc $\mathbb{P}(Z_k^{(n)} = 1) = \frac{1}{k}$, indépendant de n .¹ On note $A_k = \{Z_k^{(n)} = 1\} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(k) = \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}\}$. Il suffit de montrer que les événements A_k sont (mutuellement) indépendants. Soient $1 < k_1 < k_2 < \dots < k_j \leq n$, on a alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_j}) \\ &= \frac{1}{n!} \binom{n}{k_j} (n - k_j)! \binom{k_j - 1}{k_{j-1}} (k_j - 1 - k_{j-1})! \dots \binom{k_2 - 1}{k_1} (k_2 - 1 - k_1)! (k_1 - 1)! \\ &= \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_j} \\ &= \mathbb{P}(A_{k_1}) \mathbb{P}(A_{k_2}) \dots \mathbb{P}(A_{k_j}). \end{aligned}$$

Donc les variables $(Z_k^{(n)})_{1 \leq k \leq n}$ sont indépendantes.

- ii) $X_n = \sum_{k=1}^n Z_k^{(n)}$. Par l'indépendance des $Z_k^{(n)}$, on a

$$g_n(t) = G_{Z_1^{(n)}}(t) G_{Z_2^{(n)}}(t) \dots G_{Z_n^{(n)}}(t) = \frac{1}{n!} t(t+1) \dots (t+n-1).$$

1. On peut aussi la calculer directement en conditionnant sur $\sigma(k) = j$ pour $k \leq j \leq n$:

$$\mathbb{P}(Z_k^{(n)} = 1) = \frac{1}{n!} \sum_{j=k}^n A_{j-1}^{k-1} \cdot (n-k)! = \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{j=k}^n \frac{(j-1)!}{(j-k)!} = \frac{(n-k)!}{n!} \frac{n!}{k(n-k)!} = \frac{1}{k}.$$

iii) Par définition de la fonction génératrice, $\mathbb{P}(X_n = k)$ est le coefficient de t^k dans le polynôme $g_n(t)$.

D'où $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$, $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}$.

iv) Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[Z_k^{(n)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Par indépendance des variables $Z_k^{(n)}$, la variance de la somme est la somme des variances. Comme $Z_k^{(n)} \sim \mathcal{B}(1/k)$, on a $\mathbb{V}\left(Z_k^{(n)}\right) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$. Donc

$$\mathbb{V}(X_n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right).$$

□

Exercice 4. [Modèle de Glaton-Watson] On observe des virus qui se reproduisent tous selon la même loi avant de mourir : un virus donne naissance en une journée à X virus, où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}(X = k) = p_k$. On suppose $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$. On note f la fonction génératrice de X .

On part au jour zéro de $X_0 = 1$ virus. Au premier jour, on a donc X_1 virus, où X_1 suit la loi de X ; chacun de ces X_1 virus évolue alors indépendamment des autres virus et se reproduit selon la même loi avant de mourir : cela conduit à avoir X_2 virus au deuxième jour ; et le processus continue de la sorte. On note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

- Calculer u_0, u_1 .
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Que peut-on dire de la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Discuter selon la valeur de $\mathbb{E}[X]$. Interpréter le résultat.

Solution d'exercice 4.

- $u_0 = 0, u_1 = p_0$.
- $u_n \leq u_{n+1}$ car $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\}$. Or 1 est un majorant (上界) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Soit $\xi_i^{(n)}$ le nombre de descendants (后代) (dans la génération $n+1$) du i -ième virus, s'il existe, de la génération n . Les $\xi_i^{(n)}$ sont indépendants de même loi de X . On a alors

$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_i^{(n)}$. Soit f_n la fonction génératrice de X_n . On a alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k, X_{n+1} = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_n = k, \sum_{i=1}^k \xi_i^{(n)} = 0\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \xi_i^{(n)} = 0\right) \quad (\text{par indépendance}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{\xi_i^{(n)} = 0\}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) p_0^k \quad (\text{par indépendance}) \\
&= f_n(p_0).
\end{aligned}$$

De même, $u_n = f_{n-1}(p_0)$. On va montrer que $\forall n \geq 1, f_n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois).

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n-1} = j, X_n = k) t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n-1} = j) \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^j \xi_i^{(n-1)} = 0\right) t^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n-1} = j) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^j \xi_i^{(n-1)} = 0\right) t^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n-1} = j) G_{\sum_{i=1}^j \xi_i^{(n-1)}}(t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n-1} = j) \prod_{i=1}^j G_{\xi_i^{(n-1)}}(t) \quad (\text{par indépendance}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n-1} = j) f(t)^j \\
&= f_{n-1}(f(t)).
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient $f_n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois). Donc $u_{n+1} = f_n(p_0) = f(f_{n-1}(p_0)) = f(u_{n-1})$.

- d) [Généré par Gemini] La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite $L \in [0, 1]$. Comme f est une fonction génératrice d'une variable aléatoire entière, elle est continue (c'est une série entière de rayon de convergence ≥ 1). En passant

à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient :

$$L = f(L).$$

La limite L est donc un point fixe de f dans $[0, 1]$.

Étudions la fonction $\varphi(t) = f(t) - t$ sur $[0, 1]$. On a $\varphi'(t) = f'(t) - 1$ et $\varphi''(t) = f''(t)$. Or, $f'(1) = \mathbb{E}[X] = m$ et $f''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k t^{k-2} \geq 0$. La fonction f est convexe. On sait aussi que $f(0) = p_0 > 0$ et $f(1) = 1$.

Distinguons deux cas selon la valeur de l'espérance $m = \mathbb{E}[X]$:

— **Cas 1 : $m \leq 1$ (Régime sous-critique ou critique)**

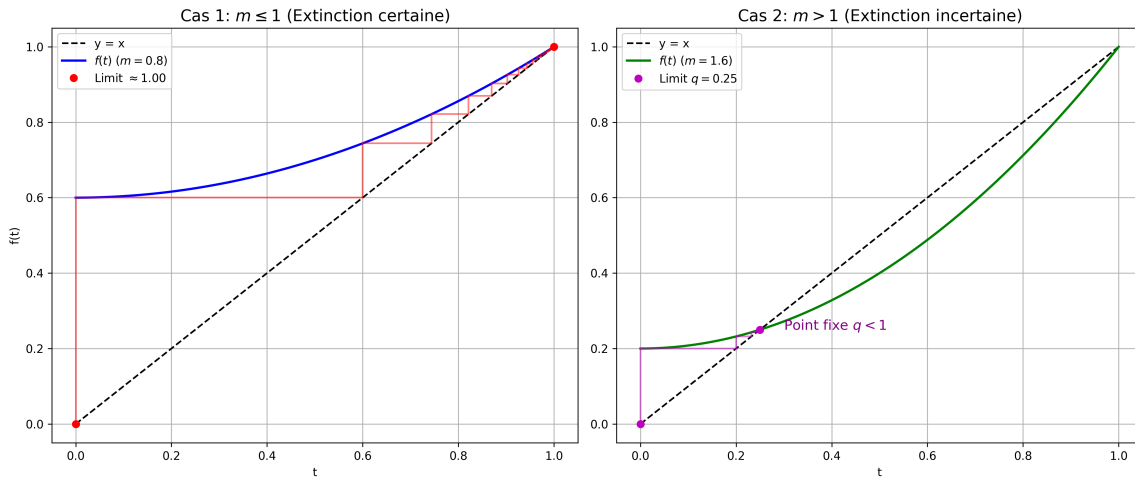
Puisque f est convexe et $f'(1) \leq 1$, la courbe $y = f(t)$ reste au-dessus de la droite $y = t$ pour tout $t \in [0, 1[$. L'équation $f(t) = t$ admet une unique solution sur $[0, 1]$, qui est $L = 1$. La suite (u_n) étant croissante et démarrant à $u_0 = 0$, elle converge vers 1.

Interprétation : La probabilité d'extinction est égale à 1. La population finit presque sûrement par disparaître.

— **Cas 2 : $m > 1$ (Régime sur-critique)**

On a $f'(1) > 1$. Comme $f(1) = 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(1 - \varepsilon) < 1 - \varepsilon$. D'autre part, $f(0) = p_0 > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $q \in]0, 1[$ tel que $f(q) = q$. Par convexité de f , ce point fixe est unique sur $[0, 1[$. Comme f est croissante, si $u_n \leq q$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(q) = q$. Par récurrence, puisque $u_0 = 0 < q$, la suite est majorée par q . Elle converge donc vers la plus petite solution de $f(t) = t$ dans $[0, 1]$, c'est-à-dire $L = q$.

Interprétation : La probabilité d'extinction est $q < 1$. Il y a une probabilité strictement positive $1 - q$ que la lignée de virus survive indéfiniment.



□

TD 9. Loi des grands nombre

Exercice 1. [Loi faible des grands nombres] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, deux à deux indépendantes, de même loi, possédant une espérance finie m . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}. \quad (9.1)$$

Dans les deux premières questions, on suppose $m = 0$.

a) Soit $\varepsilon > 0$.

i) Pour $c > 0$, on pose $g(x) = x\mathbb{1}_{|x| \leq c}$. Montrer que la variable aléatoire $g(X_1)$ est d'espérance finie et qu'on peut choisir $c > 0$ tel que $\mathbb{E}[|g(X_1) - X_1|] \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dans la suite de la question, c est ainsi fixé.

ii) On pose $a = \mathbb{E}[g(X_1)]$. Montrer que

$$\mathbb{E}[|g(X_1) - X_1 - a|] \leq \varepsilon.$$

iii) On pose $U_n = g(X_n) - a$ et $Y'_n = \frac{U_1 + \cdots + U_n}{n}$. Montrer que les variables U_n admettent un moment d'ordre 2. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(Y'_n) = 0.$$

iv) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y'_n|] = 0$.

v) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y_n|] = 0$.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

c) On ne suppose plus $m = 0$. Montrer la loi faible des grands nombres :

Théorème (Loi faible des grands nombres). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, de même loi, deux à deux indépendantes, possédant une espérance finie m . $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux indépendantes, alors Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Y_n - m| \geq \varepsilon) = 0.$$

Au cours, on a démontré la loi faible des grands nombres sous l'hypothèse que $\mathbb{E}[X_k^2] < \infty$.

Solution d'exercice 1.

$$\text{a) i) } |g(X_1)| = |X_1 \mathbf{1}_{|X_1| \leq c}| \leq |X_1| \Rightarrow \mathbb{E}[|g(X_1)|] \leq \mathbb{E}[|X_1|] < \infty.$$

Ce qui implique que $g(X_1)$ est d'espérance finie.

$$|g(X_1) - X_1| = |X_1 - X_1 \mathbf{1}_{|X_1| \leq c}| = |X_1| (1 - \mathbf{1}_{|X_1| \leq c}) = |X_1| - |X_1| \mathbf{1}_{|X_1| \leq c}.$$

Du coup

$$\mathbb{E}[|g(X_1) - X_1|] = \mathbb{E}[|X_1|] - \mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{|X_1| \leq c}].$$

Or $0 \leq |X_1| \mathbf{1}_{|X_1| \leq c} \uparrow |X_1|$ p.s. (quand $c \rightarrow +\infty$), par le théorème de la convergence monotone (théorème 1), on a

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{|X_1| \leq c}] = \mathbb{E}[|X_1|].$$

Alors

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|g(X_1) - X_1|] = \mathbb{E}[|X_1|] - \lim_{c \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{|X_1| \leq c}] = \mathbb{E}[|X_1|] - \mathbb{E}[|X_1|] = 0.$$

On peut ainsi choisir $c > 0$ tel que $\mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{|X_1| \leq c}] < \frac{\varepsilon}{2}$.

ii) En utilisant $m = \mathbb{E}[X_1] = 0$, on a

$$|a| = |\mathbb{E}[g(X_1)]| = |\mathbb{E}[g(X_1)] - \mathbb{E}[X_1]| = |\mathbb{E}[g(X_1) - X_1]| \leq \mathbb{E}[|g(X_1) - X_1|].$$

Du coup

$$\mathbb{E}[|g(X_1) - X_1 - a|] \leq \mathbb{E}[|g(X_1) - X_1| + |a|] \leq 2\mathbb{E}[|g(X_1) - X_1|] \leq \varepsilon.$$

iii) À cause de la troncature (截断), la variable aléatoire U_n est bornée :

$$|U_n| = |g(X_n) - a| \leq |X_n| \mathbf{1}_{|X_n| \leq c} + |a| \leq c + |a|.$$

Alors

$$\mathbb{E}[U_n^2] \leq (c + |a|)^2 < +\infty.$$

Ce qui signifie que U_n admettent un moment d'ordre 2

iv) Parce que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est 2-à-2 indépendantes et $U_n = g(X_n) - a$, en utilisant indépendance par transformation, on a alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est 2-à-2 indépendantes aussi.

Alors

$$\mathbb{V}(Y'_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(U_k) = \frac{1}{n^2} \cdot n \mathbb{V}(U_1) = \frac{\mathbb{V}(U_1)}{n}.$$

Or $0 \leq \mathbb{V}(U_1) = \mathbb{E}[U_1]^2 - \mathbb{E}[U_1]^2 = \mathbb{E}[U_1^2] < +\infty$, on a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(Y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{V}(U_1)}{n} = 0.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$0 \leq \mathbb{E}[|Y'_n|]^2 \leq \mathbb{E}[|Y'_n|^2] = \mathbb{V}(Y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Du coup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y'_n|] = 0.$$

v) Les variables Y_n et Y'_n étant proches, cela motive le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned} |Y_n| &= \left| \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \right| \\ &= \left| \frac{X_1 - U_1 + \cdots + X_n - U_n}{n} + \frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |U_k - X_k| + |Y'_n|. \end{aligned}$$

En calculer l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[|Y_n|] \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|U_k - X_k|] + \mathbb{E}[|Y'_n|] = \mathbb{E}[|U_1 - X_1|] + \mathbb{E}[|Y'_n|].$$

(car $U_k - X_k, 1 \leq k \leq n$ ont la même loi)

À la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient les inégalités

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y_n|] \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y_n|] = \mathbb{E}[|U_1 - X_1|] + \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y'_n|] \\ &= \mathbb{E}[|g(X_1) - X_1 - a|] + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y'_n|] = \mathbb{E}[|g(X_1) - X_1 - a|] + 0 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Or, le terme $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y_n|]$ est indépendant de ε . Par conséquent, en faisant tendre ε vers 0, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y_n|] = 0.$$

b) Par l'inégalité de Markov, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|Y_n|]}{\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Du coup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

c) Soient $\widetilde{X}_n = X_n - m$ et $\widetilde{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \widetilde{X}_k = Y_n - m, \forall n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le résultat précédent à la suite $\widetilde{X}_n$, on obtient immédiatement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Y_n - m| \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\widetilde{Y}_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

□

Exercice 2. [La convergence presque sûr] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose que

$$B = \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}, \quad C_k = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers X si $\mathbb{P}(B) = 1$.

- a) Montrer que $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$. En déduire que $\mathbb{P}(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(C_k)$.
- b) Montrer que si la série $\sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$, alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X .

Solution d'exercice 2.

- a) Par la définition de $\liminf$, on écrit C_k comme

$$C_k = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \omega \in \Omega : \forall \varepsilon > 0, \exists m \geq 1, \text{ t.q. } \forall n \geq m, |X_n - X| \leq \frac{1}{k} \right\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \{ |X_n - X| \leq \varepsilon \} \\ &= \bigcap_{\varepsilon' \in \mathbb{Q}_+^*} \underbrace{\bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \{ |X_n - X| \leq \varepsilon' \}}_{\text{monotone en } \varepsilon' > 0} \in \mathcal{A} \\ &= \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{k} \right\} \\ &= \bigcap_{k \geq 1} C_k. \end{aligned}$$

- b) On prend $\varepsilon = \frac{1}{k}$ et on a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left(|X_n - X| \geq \frac{1}{k} \right) = 0.$$

Ceci est partiellement équivalent à

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left(|X_n - X| > \frac{1}{k} \right) = 0.$$

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli 1, on obtient

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| > \frac{1}{k} \right) = 0.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_k) &= \mathbb{P} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| \leq \frac{1}{k} \right) = \mathbb{P} \left(\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| > \frac{1}{k} \right)^C \right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| > \frac{1}{k} \right) = 1. \end{aligned}$$

Or $(C_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante en k , et on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{k \geq 1} C_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(C_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

□

Remarque 1. [Contre-exemple pour la réciproque (逆命题) de la question b)]

[Généré par DeepSeek] Considérons l'espace probabilisé discret $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}(\cdot))$ avec :

- $\Omega = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, (toutes les parties sont mesurables)
- $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{C}{k^2}$ où $C = \frac{6}{\pi^2}$ est la constante de normalisation.

Définissons les variables aléatoires $X_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ par

$$X_n(k) = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}(k) = \begin{cases} 1 & , \text{si } k \geq n, \\ 0 & , \text{sinon.} \end{cases}$$

On observe que :

- a) $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ car pour tout $k \in \Omega$ fixé, $X_n(k) = 0$ dès que $n > k$.
- b) Pour $\varepsilon \in (0, 1]$, on a

$$\mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{C}{k^2} \sim \frac{C}{n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

d'où la divergence

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) = \infty.$$

Ce contre-exemple montre que la convergence presque sûre vers 0 n'implique pas la convergence de la série $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon)$. □

Remarque 2. On ne peut pas déduire $\forall \varepsilon > 0, \sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$ de $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$, mais on peut obtenir $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$ de $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$, c-à-d « La convergence presque sûr » est plus forte que « La convergence en probabilité ».

Démonstration. On suppose que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$, c-à-d $\mathbb{P}(B) = 1$.

$$\mathbb{P}(B^C) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Du coup, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq m} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Or

$$\{|X_m - X| \geq \varepsilon\} \subset \bigcup_{n \geq m} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \Rightarrow 0 \leq \mathbb{P}(\{|X_m - X| \geq \varepsilon\}) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq m} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}\right).$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{|X_m - X| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

□

Exercice 3. [Loi forte des grands nombres, Examen-USTC2020] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, de même loi, possédant une espérance finie m . On définit S_n par

$$S_n = X_1 + \dots + X_n. \quad (9.2)$$

a) Si $A_n \in \mathcal{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{p=k}^{\infty} A_p\right) = 0.$$

b) On pose $X_n^+ = \sup\{0, X_n\}$ et $Y_n = X_n^+ \mathbb{1}_{X_n^+ \leq n}$ et

$$S_n^+ = X_1^+ + \dots + X_n^+, \quad T_n = Y_1 + \dots + Y_n. \quad (9.3)$$

i) Montrer directement par définition que X_n^+ sont aléatoires réelles discrètes, mutuellement indépendantes, de même loi, possédant une espérance finie m^+ .

ii) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\frac{T_n}{n}\right] = m^+$.

iii) Soit $\alpha > 1$. On pose $k_n = [\alpha^n]$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{k_n}}{k_n} - \mathbb{E}\left[\frac{T_{k_n}}{k_n}\right]\right| \geq \varepsilon\right) < \infty.$$

En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ tel que quand $n \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{T_{k_n}}{k_n}(\omega) \rightarrow m^+ \quad \forall \omega \in \Omega \setminus A.$$

iv) Pour $p \in \llbracket k_n, k_{n+1} \rrbracket$, montrer que $(\alpha^{-1} - \alpha^{-n-1}) \frac{T_{k_n}}{k_n} \leq \frac{T_p}{p} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha^{-n}} \frac{T_{k_{n+1}}}{k_{n+1}}$. En déduire qu'il existe $A' \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A') = 0$ tel que quand $p \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{T_p}{p}(\omega) \rightarrow m^+ \quad \forall \omega \in \Omega \setminus A'.$$

v) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n^+ \neq Y_n) \leq \mathbb{E}[X_1^+].$$

En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B) = 0$ tel que quand $n \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{S_n^+}{n}(\omega) \rightarrow m^+ \quad \forall \omega \in \Omega \setminus B.$$

On dit que $\frac{S_n^+}{n}$ converge presque sûrement vers m^+ .

c) **Loi forte des grands nombres.** Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \neq m\right) = 0. \quad (9.4)$$

d) **Loi faible des grands nombres.** Déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \quad (9.5)$$

Solution d'exercice 3.

a) On a déjà montré ça dans le lemme de Borel-Cantelli 1.

b) i) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sup\{0, t\}$, alors $X_n^+ = f(X_n), \forall n \geq 1$. Elles sont donc aléatoires réelles discrètes, mutuellement indépendantes, de même loi.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n^+] &= \sum_{x \in X_n^+(\Omega)} x \mathbb{P}(X_n^+ = x) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} x \mathbb{P}(X_n^+ = x) \\ &= \sum_{x \in X_n(\Omega)} x^+ \mathbb{P}(X_n = x) = \left(\sum_{x \in X_n(\Omega)} x \mathbb{P}(X_n = x) \right)^+ = m^+. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que elles ont l'espérance finie m^+ .

ii) Par linéarité, on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{T_n}{n}\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_1^+ \mathbf{1}_{X_1^+ \leq k}\right].$$

Parce que la suite $\left(X_1^+ \mathbf{1}_{X_1^+ \leq k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est positive, croissante, et converge vers X_1^+ quand $k \rightarrow \infty$, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[X_1^+ \mathbf{1}_{X_1^+ \leq k}\right] = \mathbb{E}[X_1^+] = m^+, \forall k \geq 1 \quad \text{par convergence monotone (théorème 1)}.$$

Alors, par le lemme de césaro ¹, on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{T_n}{n}\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_1^+ \mathbf{1}_{X_1^+ \leq k}\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m^+.$$

iii) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{k_n}}{k_n} - \mathbb{E}\left[\frac{T_{k_n}}{k_n}\right]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left(\frac{T_{k_n}}{k_n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \ell$.

Ensuite, on considère la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{V} \left(\frac{T_{k_n}}{k_n} \right)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} \mathbb{V} \left(\frac{T_{k_n}}{k_n} \right) &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{k_n^2} \mathbb{V}(T_{k_n}) \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{k_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{V}(Y_j) \quad (\text{car } Y_j, j \geq 1 \text{ sont 2-à-2 indépendantes ?}) \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{k_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} (\mathbb{E}[Y_j^2] - \mathbb{E}[Y_j]^2) \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{k_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}[(X_1^+)^2 \mathbb{1}_{X_1^+ \leq j}] \quad (\text{car } X_1^+, X_j^+ \text{ ont la même loi}) \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{k_n^2} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{k_n} (X_1^+)^2 \mathbb{1}_{X_1^+ \leq j} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{1}{k_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} (X_1^+)^2 \mathbb{1}_{X_1^+ \leq j} \right] \quad (\text{par convergence monotone}) \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{1}{k_n^2} \sum_{1 \leq j \leq k_n, j \geq X_1^+} (X_1^+)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{j \geq 1, j \geq X_1^+} (X_1^+)^2 \sum_{n \geq 1, k_n \geq j} \frac{1}{k_n^2} \right] \quad (\text{permutation des sommes})
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser une série géométrique pour contrôler la série $\sum_{n \geq 1, k_n \geq j} k_n^2$.

En utilisant $\alpha^n - 1 < k_n = [\alpha^n] \leq \alpha^n$, on a

$$\frac{1}{k_{n+1}^2} \bigg/ \frac{1}{k_n^2} = \frac{k_n^2}{k_{n+1}^2} \leq \frac{\alpha^{2n}}{(\alpha^{n+1} - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha - \alpha^{-n})^2}.$$

Alors, il existe $N_\alpha \in \mathbb{N}^*$ t.q.

$$\forall N_\alpha, \frac{1}{(\alpha - \alpha^{-n})^2} < q_\alpha < 1.$$

Donc

$$\sum_{n \geq 1, k_n \geq j} \frac{1}{k_n^2} = \sum_{1 \leq n \leq N_\alpha, k_n \geq j} \frac{1}{k_n^2} + \sum_{n > N_\alpha, k_n \geq j} \frac{1}{k_n^2} \leq \left(N_\alpha + \frac{1}{1 - q_\alpha} \right) \frac{1}{j^2} = \frac{C_\alpha}{j^2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{j \geq 1, j \geq X_1^+} (X_1^+)^2 \sum_{n \geq 1, k_n \geq j} \frac{1}{k_n^2} \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{j \geq 1, j \geq X_1^+} (X_1^+)^2 \frac{C_\alpha}{j^2} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[(X_1^+)^2 \sum_{j \geq X_1^+} \mathbb{1}_{X_1^+ \geq 1} \frac{C_\alpha}{j^2} + (X_1^+)^2 \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{X_1^+ < 1} \frac{C_\alpha}{j^2} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[(X_1^+)^2 \mathbb{1}_{X_1^+ \geq 1} \sum_{j \geq X_1^+} \frac{C_\alpha}{j^2} \right] + \mathbb{E} \left[(X_1^+)^2 \mathbb{1}_{X_1^+ < 1} \sum_{j \geq 1} \frac{C_\alpha}{j^2} \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[(X_1^+)^2 \frac{\widetilde{C}_\alpha}{X_1^+} \right] + \mathbb{E} \left[1 \cdot \frac{\pi^2 C_\alpha}{6} \right] \\
&= \widetilde{C}_\alpha m^+ + \frac{\pi^2 C_\alpha}{6} < +\infty.
\end{aligned}$$

Du coup, on obtient finalement

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left(\left| \frac{T_{k_n}}{k_n} - \mathbb{E} \left[\frac{T_{k_n}}{k_n} \right] \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n \geq 1} \mathbb{V} \left(\frac{T_{k_n}}{k_n} \right) < +\infty.$$

Par l'exercice 2, on obtient

$$\frac{T_{k_n}}{k_n} - \mathbb{E} \left[\frac{T_{k_n}}{k_n} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Or $\mathbb{E} \left[\frac{T_{k_n}}{k_n} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} m^+$, on obtient donc $\frac{T_{k_n}}{k_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} m^+$.

C'est-à-dire qu'il existe $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ tel que quand $n \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{T_{k_n}}{k_n}(\omega) \rightarrow m^+ \quad \forall \omega \in \Omega \setminus A.$$

iv) On a $T_{k_n} \leq T_p \leq T_{k_{n+1}}$, car $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Du coup

$$\frac{k_n}{p} \cdot \frac{T_{k_n}}{k_n} \leq \frac{T_p}{p} \leq \frac{k_{n+1}}{p} \cdot \frac{T_{k_{n+1}}}{k_{n+1}}.$$

Or $\alpha^n - 1 < k_n \leq \alpha^n$, $\alpha^{n+1} - 1 < k_{n+1} \leq \alpha^{n+1}$, et $p \in [k_n, k_{n+1}]$, on déduit alors

$$(\alpha^{-1} - \alpha^{-n-1}) \frac{T_{k_n}}{k_n} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1}} \cdot \frac{T_{k_n}}{k_n} \leq \frac{T_p}{p} \leq \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n - 1} \cdot \frac{T_{k_{n+1}}}{k_{n+1}} = \frac{\alpha}{1 - \alpha^{-n}} \cdot \frac{T_{k_{n+1}}}{k_{n+1}}.$$

Pour $\omega \in \Omega \setminus A$, en faisant tendre p vers l'infini, on obtient

$$\alpha^{-1} m^+ \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \frac{T_p(\omega)}{p} \leq \limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{T_p(\omega)}{p} \leq \alpha m^+.$$

On prend $\alpha_k = 1 + \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, et on a

$$\forall \omega \in \Omega \setminus A_k, \alpha_k^{-1} m^+ \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \frac{T_p(\omega)}{p} \leq \limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{T_p(\omega)}{p} \leq \alpha_k m^+.$$

Soit $A' = \bigcup_{k \geq 1} A_k$, alors $\mathbb{P}(A') \leq \sum_k \mathbb{P}(A_k) = 0$ et pour tout $\omega \in \Omega \setminus A'$, on a

$$\forall k \geq 1, \alpha_k^{-1} m^+ \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \frac{T_p(\omega)}{p} \leq \limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{T_p(\omega)}{p} \leq \alpha_k m^+.$$

En faisant k ver l'infini, on obtient

$$m^+ \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \frac{T_p(\omega)}{p} \leq \limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{T_p(\omega)}{p} \leq m^+$$

Du coup

$$\forall \omega \in \Omega \setminus A', \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{T_p(\omega)}{p} = m^+.$$

v) Par définition, $\{X_n^+ \neq Y_n\} = \{X_n^+ \neq X_n^+ \mathbf{1}_{X_n^+ \leq n}\} = \{X_n^+ > n\}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n^+ > n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1^+ > n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in X_1^+(\Omega), x > n} \mathbb{P}(X_1^+ = x) \\ &= \sum_{x \in X_1^+(\Omega)} \sum_{n=1}^{[x]} \mathbb{P}(X_1^+ = x) \\ &= \sum_{x \in X_1^+(\Omega)} [x] \mathbb{P}(X_1^+ = x) \\ &\leq \sum_{x \in X_1^+(\Omega)} x \mathbb{P}(X_1^+ = x) = \mathbb{E}[X_1^+] < +\infty. \end{aligned}$$

Par le lemme de convergence monotone (théorème 1), on obtient

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n^+ \neq Y_n\}\right) = 0.$$

En envisagant son complémentaire

$$\begin{aligned} B^+ &:= \liminf_{n \rightarrow \infty} \{X_n^+ = Y_n\} \\ &= \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \{X_n^+ = Y_n\} \in \mathcal{A} \\ &= \{\omega \in \Omega : \exists m \geq 1, \forall n \geq m, X_n^+(\omega) = Y_n(\omega)\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in \{X_n = Y_n\} \text{ sauf un nombre fini de } n\}, \end{aligned}$$

on a $\mathbb{P}(B^+) = 1$. Pour $\omega \in B^+ \cap (\Omega \setminus A')$,

$$\frac{S_n^+(\omega)}{n} = \frac{T_n(\omega)}{n} + \frac{\sum_{k=1}^n (X_n^+(\omega) - Y_n(\omega))}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} m^+ + 0 = m^+.$$

On note $B = (B^+ \cap (\Omega \setminus A'))^C = (B^+)^C \cup A' \in \mathcal{A}$, on a alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((B^+)^C \cup A') \leq \mathbb{P}((B^+)^C) + \mathbb{P}(A') = 0.$$

C'est-à-dire que $\frac{S_n^+}{n}$ converge presque sûrement.

c) De la même manière, il existe $D \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(D) = 0$ tel que quand $n \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{S_n^-(\omega)}{n} \rightarrow m^- \quad \forall \omega \in \Omega \setminus B.$$

Alors, $\mathbb{P}(B \cup D) = 0$ et pour tout $\omega \in \Omega \setminus (B \cup D)$,

$$\frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{S_n^+(\omega)}{n} - \frac{S_n^-(\omega)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m^+ - m^- = m.$$

Ce résultat montre la loi forte des grands nombres.

d) La loi forte des grands nombres implique la loi faible des grands nombres par *Remarque 2* de l'exercice 2. □

Exercice 4. [Inégalité de Kolmogorov] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, mutuellement indépendantes, possédant un moment d'ordre 2, centrées. Soit $a > 0$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on définit

$$S_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_i, \quad B_i = \{|S_1| < a, \dots, |S_{i-1}| < a, |S_i| \geq a\}.$$

- a) Montrer que pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les variables $S_i \mathbb{1}_{B_i}$ et $S_n - S_i$ sont indépendantes.
b) En déduire que

$$\mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{1}_{B_i}] = \mathbb{E}[S_i^2 \mathbb{1}_{B_i}] + \mathbb{E}[(S_n - S_i)^2 \mathbb{1}_{B_i}] \geq a^2 \mathbb{P}(B_i).$$

c) On pose $C = \{\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq a\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(B_i).$$

d) En déduire l'inégalité de Kolmogorov,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{a^2}.$$

e) Applique l'inégalité de Kolmogorov à l'exercice précédent pour montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_n \mathbb{P}\left(\max_{k_n \leq p \leq k_{n+1}} \left|\frac{T_p}{p} - \mathbb{E}\left[\frac{T_p}{p}\right]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_n \frac{\mathbb{V}(T_{k_{n+1}})}{\varepsilon^2 k_n^2} < +\infty.$$

En déduire la loi forte des grandes nombres.

Solution d'exercice 4.

- a) $S_i \mathbb{1}_{B_i}$ est une fonction de $(S_1, \dots, S_i)$, donc c'est une fonction de $(X_1, \dots, X_i)$. $S_n - S_i = X_{i+1} + \cdots + X_n$. Or $(X_1, \dots, X_i) \perp\!\!\!\perp (X_{i+1}, \dots, X_n) \Rightarrow S_i \mathbb{1}_{B_i} \perp\!\!\!\perp (S_n - S_i)$.

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{1}_{B_i}] &= \mathbb{E}[(S_i + S_n - S_i)^2 \mathbb{1}_{B_i}] \\
&= \mathbb{E}[S_i^2 \mathbb{1}_{B_i}] + \mathbb{E}[(S_n - S_i)^2 \mathbb{1}_{B_i}] + 2\mathbb{E}[(S_n - S_i)S_i \mathbb{1}_{B_i}] \\
&= \mathbb{E}[S_i^2 \mathbb{1}_{B_i}] + \mathbb{E}[(S_n - S_i)^2 \mathbb{1}_{B_i}] + 2 \underbrace{\mathbb{E}[S_n - S_i]}_{\mathbb{E}[X_{i+1}] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = 0} \mathbb{E}[S_i \mathbb{1}_{B_i}] \\
&\geq \mathbb{E}[a^2 \mathbb{1}_{B_i}] + 0 + 0 \\
&= a^2 \mathbb{P}(B_i).
\end{aligned}$$

c) $C = \bigsqcup_{i=1}^n \{\text{la } i\text{-ème fois où on va } |S_i| \geq a\} = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$. D'où $\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)$.

d)

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{1}_{B_i}]}{a^2} = \frac{1}{a^2} \mathbb{E}\left[S_n^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i}}_{\mathbb{1}_C \leq 1}\right] \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{a^2}.$$

e)

$$\mathbb{P}\left(\max_{k_n \leq p \leq k_{n+1}} \left|\frac{T_p}{p} - \mathbb{E}\left[\frac{T_p}{p}\right]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{k_n \leq p \leq k_{n+1}} |T_p - \mathbb{E}[T_p]| \geq \varepsilon k_n\right).$$

On pose $\widetilde{X}_1 = T_{k_n} - \mathbb{E}[T_{k_n}]$, $\widetilde{X}_j = Y_{j+k_n-1} - \mathbb{E}[Y_{j+k_n-1}]$, $j = 2, \dots, p - k_n + 1$. Les $\widetilde{X}_j$ sont variables centrées et indépendantes, admettant un moment d'ordre 2. Comme $T_p - \mathbb{E}[T_p] = \sum_{j=1}^{p-k_n+1} \widetilde{X}_j =: \widetilde{S}_{p-k_n+1}$, l'inégalité de Kolmogorov donne

$$\mathbb{P}\left(\max_{k_n \leq p \leq k_{n+1}} |\widetilde{S}_{p-k_n+1}| \geq \varepsilon k_n\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\widetilde{S}_{k_{n+1}-k_n+1})}{\varepsilon^2 k_n^2} = \frac{\mathbb{V}(T_{k_{n+1}})}{\varepsilon^2 k_n^2}.$$

Dans l'exercice 3 iii), on a montré que $\sum_n \frac{\mathbb{V}(T_{k_n})}{k_n^2} < +\infty$. Or $k_{n+1} \sim \alpha k_n$, on a alors

$$\sum_n \frac{\mathbb{V}(T_{k_{n+1}})}{\varepsilon^2 k_n^2} < +\infty. \text{ Donc }$$

$$\sum_n \mathbb{P}\left(\max_{k_n \leq p \leq k_{n+1}} \left|\frac{T_p}{p} - \mathbb{E}\left[\frac{T_p}{p}\right]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_n \frac{\mathbb{V}(T_{k_{n+1}})}{\varepsilon^2 k_n^2} < +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Par l'exercice 2, on obtient

$$\max_{k_n \leq p \leq k_{n+1}} \left|\frac{T_p}{p} - \mathbb{E}\left[\frac{T_p}{p}\right]\right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Or $\mathbb{E}\left[\frac{T_p}{p}\right] \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} m^+$, donc il existe $D \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(D) = 0$ tel que pour tout $\omega \in \Omega \setminus D$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 1, \forall n \geq n_0, \max_{k_n \leq p \leq k_{n+1}} \left|\frac{T_p}{p}(\omega) - m^+\right| < \varepsilon.$$

Du coup $\forall p \geq k_{n_0}$, $\left|\frac{T_p}{p}(\omega) - m^+\right| \leq \varepsilon$. C'est-à-dire que $\frac{T_p}{p}(\omega) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} m^+$. La suite du processus est identique à celle de l'exercice précédent. $\square$